Unidad 5

Anualidades vencidas

Objetivos

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Calculará el valor de la renta de una perpetuidad simple vencida.
- Calculará el valor actual de una perpetuidad simple vencida.
- Calculará el monto producido por una anualidad vencida.
- Calculará el valor presente o actual de una anualidad vencida.
- Calculará el valor de la renta de una anualidad vencida.
- Determinará el tiempo o plazo de una anualidad vencida.

Introducción

En la actualidad, la mayoría de la población de cualquier ciudad está sujeta a compras, pago de deudas o sistemas de ahorro a plazo, por lo cual es de gran utilidad saber realizar cálculos para este tipo de situaciones, y poder determinar por ejemplo:

- ¿Cuánto tendré ahorrado si deposito cantidades iguales durante cierto tiempo?
- ¿Cuál es el costo de contado de un artículo comprado a crédito con pagos fijos, cuando conocemos el número de pagos y el valor de los mismos?
- ¿De cuánto deben ser los depósitos para ahorrar determinada cantidad en un cierto tiempo?
- ¿Cuántos pagos iguales de cierta cantidad se deben realizar para liquidar un crédito?

Éstos son algunos ejemplos de lo que en matemáticas financieras se conoce como anualidades, aunque existen muchas situaciones más. A lo largo de esta unidad revisaremos las perpetuidades y las anualidades vencidas, y los cálculos que ellas implican.

5.1. Anualidades

Iniciaremos la unidad dando algunas definiciones y conceptos básicos para poder entender las anualidades, sus características y clasificación.

En primer término necesitamos definir lo que es una anualidad.

La **anualidad** es un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos iguales de tiempo.

Una serie de pagos iguales, realizados cada semana, ¿se considera como una anualidad?

Estamos muy acostumbrados a pensar que si se trata de una anualidad, es porque los pagos son cada año, y que si los pagos se realizan cada mes, entonces se debe tratar de una mensualidad, de ser abonos semestrales, decimos que se trata de una semestralidad, aunque en realidad, desde el punto de vista de las matemáticas financieras en

los tres casos estaríamos hablando de anualidades no importando el tiempo transcurrido entre cada pago, siempre que éste sea el mismo entre todos los pagos.

Las anualidades dependen de 3 factores: valor de cada pago, número de pagos y tasa de interés.

A cada uno de los pagos, depósitos o retiros (según sea el caso) que se realizan de manera periódica, se le conoce como **renta**, la cual se representa con la letra *R*.

Al tiempo transcurrido entre un pago y otro se le llama **intervalo o periodo de pago**; el **número de rentas** al cual representaremos con la letra *n*, depende del tiempo durante el cual se va a pagar y el intervalo de pago, por ejemplo:

Para una deuda que se liquida en 3 años con pagos bimestrales, ¿cuántos pagos hay que realizar?

Solución

Como los pagos son bimestrales durante 3 años, mediante una regla de tres se determina cuántos bimestres hay en 3 años:

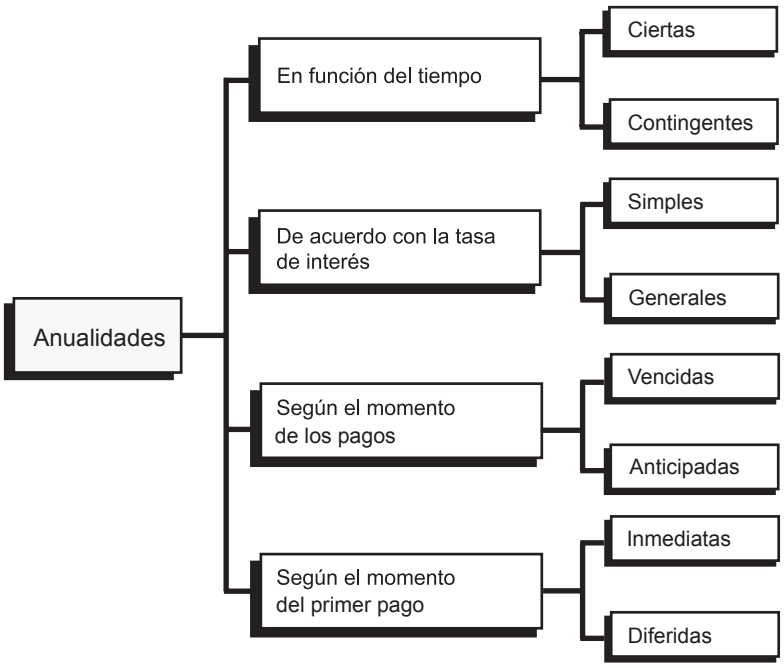
6 bimestres _____ un año
x bimestres _____ 3 años

$$x = \frac{3(6)}{1} = 18 \text{ bimestres}$$

Significa entonces que durante 3 años se realizan 18 pagos bimestrales.

Además de la renta y el número de pagos de una anualidad, la tasa de interés es muy importante, la cual normalmente se expresa anualizada capitalizable periódicamente, es decir, como una tasa nominal (*j*).

De acuerdo con estos tres factores, las anualidades se clasifican como lo muestra el siguiente diagrama:



Las anualidades **ciertas** son aquellas donde las fechas del primer pago y hasta el último se establecen desde la firma del convenio, por ejemplo: un crédito hipotecario, en el cual se establece cuántos pagos se van a realizar y cuándo se deben hacer.

Las anualidades **contingentes** son aquellas donde el inicio o el término de la anualidad no pueden ser fijados desde el principio, y dependen de algún acontecimiento externo. Un ejemplo claro de esto son los planes de jubilación, los cuales se terminan de pagar cuando la persona fallece, lo cual no se sabe cuándo ocurrirá.

Las anualidades **simples** son aquellas donde los periodos de capitalización que indica la tasa de interés, son iguales al periodo de pago, por ejemplo un crédito para la compra de un automóvil, donde los pagos son mensuales y la tasa de interés pactada es anual capitalizable mensualmente.

Las **anualidades generales** son aquellas donde los periodos de capitalización de la tasa de interés no coinciden con el periodo de pago, un ejemplo puede ser una deuda que se liquida con pagos bimestrales y una tasa pactada anual con capitalización semestral.

Las **anualidades inmediatas** son aquellas en las que el primer pago se realiza en el periodo inmediato a la formalización del convenio, un ejemplo es la compra de electrónicos a crédito, donde el primer pago se realiza al momento de la compra.

Las **anualidades diferidas** son aquellas donde el primer pago se pospone uno o más periodos después de la firma del convenio, un ejemplo es la compra de una casa en preventa, en la cual se inician los pagos al momento de la entrega del inmueble, lo cual puede ser 6 o 12 meses después de la firma del contrato.

Las **anualidades vencidas**, conocidas también como **ordinarias**, son aquellas donde el abono se realiza al final del periodo de pago, por ejemplo los salarios quincenales, que se pagan al finalizar la quincena, esto es, los días 15 y 30 de cada mes.

Las **anualidades anticipadas** son aquellas donde el pago se realiza al inicio de cada periodo de pago, por ejemplo, la renta de un departamento, la cual se pagará al inicio de cada mes.

Estos tipos de anualidades no son excluyentes unos de otros; pensemos en un crédito para automóvil, que se liquida con 18 pagos iguales al principio de cada mes con una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente.

¿Una anualidad puede ser de dos tipos diferentes simultáneamente?

En este ejemplo se puede observar que se trata de una anualidad **cierta** (son 18 pagos), **simple** (pagos mensuales con tasa capitalizable mensualmente), **anticipada** (al principio del mes) e **inmediata** (el primer pago se realiza al momento de la compra).

A lo largo de esta unidad se revisarán las perpetuidades que son un tipo de anualidad contingente, y las anualidades vencidas.

5.2. Perpetuidades

¿Qué tipo de anualidades son las perpetuidades?

Las rentas **perpetuas** o **perpetuidades** son aquellas anualidades cuyo plazo no tiene fin, se pagan indefinidamente salvo que suceda algún imprevisto.

En el caso de las rentas perpetuas se trata de anualidades contingentes, sin embargo también pueden presentarse rentas perpetuas vencidas, anticipadas o diferidas; en esta unidad enfocaremos nuestro estudio únicamente a las perpetuidades simples y vencidas.

Debido a que las rentas perpetuas o perpetuidades no tienen fin, es imposible calcular el monto de ellas.

5.2.1. Valor actual o presente de una renta perpetua simple

Debido a que las perpetuidades se pagan de manera infinita, el valor actual de ellas debe ser tal que el interés que se genere en cada periodo de pago sea mayor o igual al valor de la renta, por lo que el valor actual de una renta perpetua simple y vencida está dado por la siguiente fórmula:

$$A = \frac{R}{i}$$

Donde:
A es el valor presente o actual de la perpetuidad
R es la renta perpetua
i es la tasa efectiva de interés

Ejemplos

1. ¿Cuál es el valor actual de una renta perpetua de $72 650 anuales, si se considera una tasa efectiva de 11% anual?

Solución

Se identifican los datos:

R=$72 650

i=11% = 0.11

Se sustituyen los valores en la fórmula para el valor actual de una perpetuidad:

$$A = \frac{R}{i} = \frac{72\,650}{0.11} = 660\,454.55$$

El valor actual es $660 454.55.

2. Una persona dejó en su testamento una cantidad para que se distribuya en becas a perpetuidad, asignando rentas mensuales de $20 000. Si la tasa de interés es de 24% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es el valor actual de la herencia?

Solución

Se identifican los datos:

R=$20 000

j=24% anual capitalizable mensualmente

Como la tasa de interés que se proporciona es nominal, y lo que se requiere es tasa efectiva, se realiza la conversión utilizando la misma relación que en las unidades anteriores ($i=\frac{j}{k}$).

$$i=\frac{j}{k}=\frac{0.24}{12}=0.02$$

Se sustituyen los valores:

$$A=\frac{R}{i}=\frac{20\,000}{0.02}=1\ 000\ 000$$

El valor actual es $1 000 000.

Hay ocasiones en las que se conoce el valor actual de la perpetuidad, y lo que se requiere saber es el valor de las rentas, el cual se puede determinar despejándolo de la fórmula para el valor actual ($A=\frac{R}{i}$).

Por lo tanto:

$R=Ai$

Ejemplo

Se depositan en un fondo para mantenimiento de un edificio $3 450 000, en un banco que paga 8.5% anual efectivo. ¿De cuánto se puede disponer anualmente para mantenimiento?

Solución

Se identifican los datos:

A=$3 450 000

i=8.5%=0.085

Se sustituyen valores:

$R=Ai$=3 450 000 (0.085)=293 250

Se puede disponer de $293 250 anuales para mantenimiento.

Ejercicio 1

1. ¿Cuál es el valor actual de una renta perpetua de $725 000 anuales si se tiene una tasa de interés de 11.5% efectivo anual?
2. ¿Cuánto se tendrá que depositar en el banco el día de hoy si se espera poder recibir $120 000 anuales y el banco ofrece un interés de 18% efectivo anual?
3. ¿Cuál es el valor presente de una renta perpetua de $58 000 semestrales si el fondo en el cual se tienen paga una tasa de interés de 28% anual capitalizable semestralmente?
4. ¿Qué cantidad anual perpetua se podrá retirar de una cuenta bancaria donde se depositaron el día de hoy $983 600 y el banco ofrece una tasa de 15% efectiva anual?
5. ¿Cuál es la renta perpetua anual de que se puede disponer con una cuenta bancaria en la que se depositan el día de hoy $1 239 000, con una tasa de interés de 31% anual?

5.3. Anualidades vencidas

Como ya se mencionó, las anualidades vencidas son aquellas en las que los pagos se realizan al finalizar el periodo de pago, como lo muestra la figura 5.1.

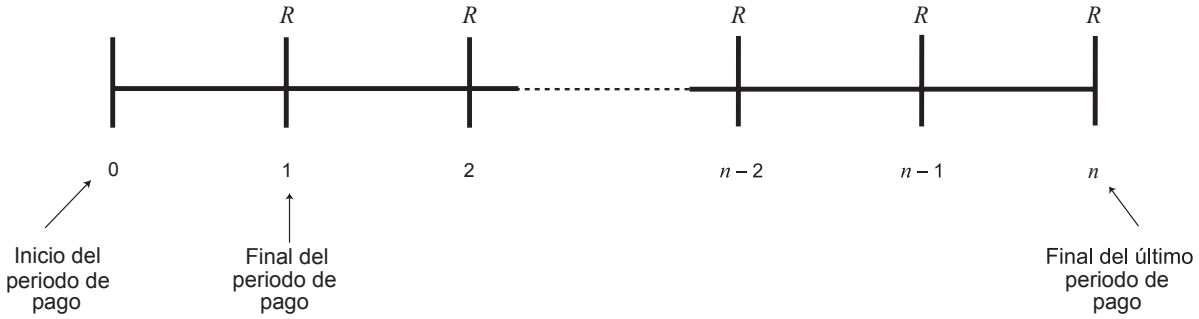


Figura 5.1.

En esta unidad nos referiremos únicamente a anualidades vencidas, ciertas simples e inmediatas.

5.3.1. Cálculo del monto

Se puede definir al monto de una anualidad vencida como el valor acumulado de una serie de pagos periódicos, efectuados al final de cada intervalo de pago, cuya fecha de evaluación se considera al término del plazo de la anualidad, como lo muestra la gráfica de la figura 5.2.

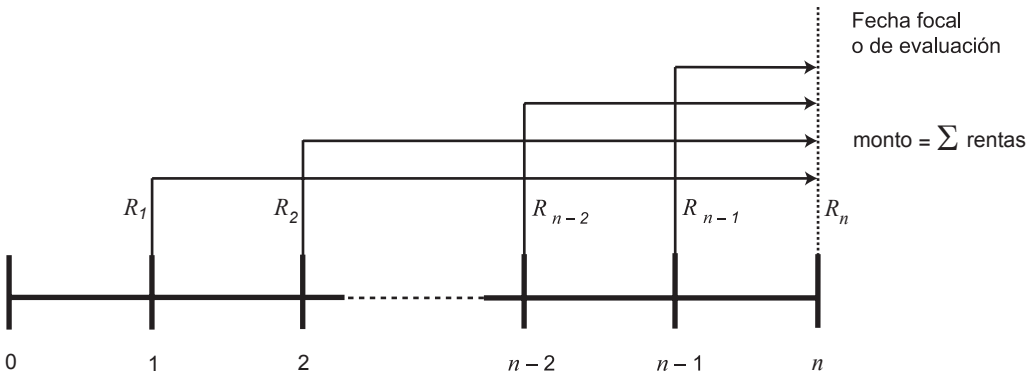


Figura 5.2.

Si observas la gráfica de la figura 5.2 en realidad nos representa una ecuación de valor, por lo cual primeramente es necesario trasladar todas las rentas a la fecha de evaluación (fecha focal); realicemos este procedimiento utilizando la fórmula para el monto o valor futuro, $M=C(1+i)^n$.

Para la primera renta (R_1) tendríamos que el monto es:

$$M_1=R(1+i)^{n-1}$$

Para la segunda renta (R_2):

$$M_2=R(1+ i)^{n-2}$$

Para el penúltimo pago (R_3) el monto es:

$$M_3=R(1+ i)^{n-3}$$

Como puedes observar, en la gráfica la última renta no hay que trasladarla, ya que está ubicada en la fecha focal, por lo tanto:

$$M_n=R(1+i)^{n-n}=R(1+i)^0=R$$

Considerando que el monto de una anualidad es la suma de los pagos en la fecha de evaluación, tendríamos:

$$M=R(1+ i)^{n-1}+R(1+ i)^{n-2} +. . .+ R(1+i)+R$$

Se aplica la propiedad conmutativa, para invertir el orden de los sumandos, con lo que obtenemos:

$$M=R+R(1+i)+. . .+R(1+i)^{n-2}+R(1+i)^{n-1}$$

Si observas el resultado del monto, en realidad es la suma de los n términos de una progresión geométrica, donde r representa la razón común, que en este caso está dada por

(1+ i); a es el primer término que corresponde a R y n es el número de términos de la progresión, que corresponde al número de pagos.

Sustituimos los valores en la fórmula para calcular la suma de los n términos de una progresión geométrica, que se aplicó en la unidad 1:

$$S = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

Simplificando tenemos:

$$M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{1 + i\ - 1}$$

$$M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Donde:
M es el monto de la anualidad
R es la renta
i es la tasa por periodo de capitalización
n es el número de pagos

Ejemplo

Una persona ahorra $2 500 al finalizar cada semestre durante 3 años a 13% capitalizable semestralmente. ¿Cuánto recibe en total al cabo de 3 años?

Solución

Identificamos los datos:

Como los pagos se realizan al final de cada semestre, significa que son pagos vencidos, por lo tanto se trata de una anualidad vencida.

Donde:

R=$2 500

$i=\frac{0.13}{2}=0.065$ (recuerda que $i=\frac{j}{k}$, para este caso $k=2$, por ser semestral)

$n=3$ años$=3\ (2)=6$ pagos

$$M=R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$M=2\ 500\frac{(1+0.065)^6-1}{0.065}$$

Realizando las operaciones:

$$M=2\ 500\frac{(1+0.065)^6-1}{0.065}=2\,500\frac{(1.065)^6-1}{0.065}=2\,500\frac{1.459142297-1}{0.065}$$

$$M=2\,500\frac{0.459142297}{0.065}=2\,500(7.063727646)=17\,659.32$$

Significa que recibe en total al final de los 3 años $17 659.32.

5.3.2. Cálculo del valor actual

Muchas veces se hace necesario calcular el valor actual o presente de una anualidad, que es la suma de los valores actuales de todos los pagos (renta o anualidad) aplicando una cierta tasa de interés compuesto. En otras palabras, es el valor al contado de una cantidad constante.

Tomando la definición que dice que el valor actual de una anualidad vencida es el valor actual del monto de dicha anualidad, y utilizando la fórmula para el valor actual con interés compuesto: $C=\frac{M}{(1+i)^n}$

Considerando que M es el monto de la anualidad, ($M=R\frac{(1+i)^n-1}{i}$) se sustituye y se simplifica:

$$C=\frac{R\frac{(1+i)^n-1}{i}}{(1+i)^n}=R\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}=R\frac{\left[(1+i)^n-1\right](1+i)^{-n}}{i}=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Por lo tanto la fórmula para calcular el valor actual de una anualidad vencida es:

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Donde:
C es el valor actual de la anualidad
R es la renta
i es la tasa por periodo de capitalización
n es el número de pagos

Ejemplo

Una compañía vende equipos de cómputo mediante pagos mensuales vencidos de $800 durante 1.5 años. Si en estos pagos se está cargando una tasa de interés de 14% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es el precio de contado de cada computadora?

Solución

Se identifican los datos:

$R = \$800$

$$i = \frac{0.14}{12} = 0.011666667$$

$n = 1.5(12) = 18$ pagos mensuales durante dos años

Como la pregunta es ¿cuál es el precio de contado de cada computadora?, y el precio de contado representa el valor actual, significa que se busca el valor presente de los pagos (rentas), por lo tanto al sustituir los datos en la fórmula para el valor presente de una anualidad vencida se tiene:

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$C = 800\,\frac{1-(1+0.011666667)^{-18}}{0.011666667}$$

Realizando las operaciones:

$$C = 800\,\frac{1-(1+0.011666667)^{-18}}{0.011666668} = 800\,\frac{1-(1.011666667)^{-18}}{0.011666667} = 800\,\frac{1-0.811570149}{0.011666667}$$

$$= 800\,\frac{0.18842985}{0.011666667}$$

$$C = 800\,(16.15112955) = 12\,920.90$$

El precio de contado de cada equipo es $12 920.90.

Ejercicio 2

1. ¿Cuánto se acumulará en un año si se depositan $15 000 pesos al finalizar cada mes en una cuenta bancaria que rinde 22% anual convertible mensualmente?
2. ¿Cuál es el monto de una renta vencida de $172 000 pesos trimestrales depositados durante dos años y medio, en un banco que paga una tasa de interés de 23% capitalizable en forma trimestral?
3. ¿Cuál sería el valor presente de una anualidad de $52 000 pesos al final de cada trimestre durante 30 meses, si se acuerda una tasa de interés de 18% convertible trimestralmente?
4. ¿Cuál es el precio de contado de una máquina de inyección para plásticos, comprada mediante 12 pagos mensuales vencidos de $75 200 c/u, con una tasa de 9% de interés capitalizable mensualmente?
5. Una persona deposita $5 000 vencidos cada 6 meses a 12% de interés capitalizable semestralmente. ¿Cuánto tendrá al final de 5 años?
6. Calcula el valor de contado de un equipo industrial comprado con 16 pagos trimestrales de $25 000, con 10% de interés capitalizable trimestralmente.

5.3.3. Cálculo de la renta

Frecuentemente se requiere conocer el valor de la renta de una anualidad simple cierta vencida, en casos como:

- El pago mensual que debe efectuarse para cancelar una deuda en un determinado intervalo de tiempo.
- La cantidad de dinero que hay que colocar periódicamente en un fondo de amortización en un cierto plazo.
- Las cuotas periódicas con las cuales se puede cancelar una mercancía, conociendo su valor de contado y la tasa de interés.

¿Cuántas formas se pueden presentar para calcular el valor de la renta?

Los problemas que dan lugar al cálculo de la renta pueden ser de dos tipos: aquellos en los que el monto es un valor conocido y aquellos donde el valor actual a cubrir es el dato que se conoce.
En ambos casos se parte de las dos fórmulas que ya se conocen, la que calcula el monto:

$$M=R\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Y la que nos permite calcular el valor actual:

$$C=R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Despejando en ambos casos el valor de la renta para obtener las siguientes fórmulas:

Cálculo de la renta cuando se conoce el monto

$$R=\frac{Mi}{(1+i)^n-1}$$

Donde:
R es la renta
M es el monto de la anualidad
i es la tasa por periodo de capitalización
n es el número de pagos

Cálculo de la renta cuando se conoce el valor actual

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$$

Donde:
R es la renta
C es el valor actual de la anualidad
i es la tasa por periodo de capitalización
n es el número de pagos

Ejemplos

1. La empresa Plásticos Mexicanos, S. A. de C. V. planea comprar una máquina dentro de 3 años, la cual se espera tendrá un costo de $250 000. La compañía puede disponer de pequeñas cantidades al corte semestral, si deposita estas cantidades en una cuenta bancaria que paga 16% de interés con capitalización semestral. ¿Cuánto se debe disponer en el cierre semestral para depositarlo en el banco?

Solución

Se identifican los datos:

M=$250 000

Se trata de un problema de monto ya que es el ahorro al final de 3 años.

$$i = \frac{0.16}{2} = 0.08$$

n=3(2)=6 pagos semestrales durante 3 años

El valor que se va a buscar es la renta, y como uno de los datos con los que se cuenta es el monto de la anualidad, entonces se utiliza la fórmula que tiene como referencia el monto:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$

Se sustituyen los valores y se simplifica:

$$R = \frac{(250\,000)(0.08)}{(1+0.08)^6 - 1} = \frac{20\,000}{1.586874323 - 1} = \frac{20\,000}{0.586874323} = 34\,078.85$$

Cada depósito debe ser de $34 078.85 por semestre.

2. Una persona adquiere una lavadora cuyo precio es de $9 200, y la tienda le da la oportunidad de pagarla con 18 mensualidades vencidas. ¿De cuánto será cada mensualidad si le cargan 28% de interés capitalizable mensualmente?

Solución

Se identifican los datos:

C=$9 200

Se trata de un problema de valor actual ya que se tiene precio de contado.

$$i = \frac{0.28}{12} = 0.023333333$$

n=18 pagos mensuales

El valor que se va a buscar es la renta, y debido a que uno de los datos con los que se cuenta es el precio de contado, se utilizará la fórmula que pide como referencia el valor actual.

$$R = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Se sustituyen los valores y simplificando:

$$R = \frac{(9\,200)(0.023333333)}{1 - (1+0.023333333)^{-18}} = \frac{214.6666636}{1 - 0.660224792} = \frac{214.6666636}{0.339775207} = 631.79$$

El pago debe ser de $631.79 cada mes.

5.3.4. Cálculo del tiempo

Cuando se requiere determinar el número de pagos o de depósitos que se requieren para cubrir una cierta cantidad, se presenta la misma situación que con la renta, se pueden utilizar tanto la fórmula para calcular el monto como la que permite calcular el valor actual, dependiendo de los datos con los que se cuente.

Si el monto es uno de los datos con los que se cuenta, entonces se despeja de la fórmula para su cálculo el valor de n que representa el número de pagos a realizar.

Despejando n de la fórmula del monto:

$$M=R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$R\frac{(1+i)^n-1}{i}=M$$

$$R\left[(1+i)^n-1\right]=Mi$$

$$(1+i)^n-1=\frac{Mi}{R}$$

$$(1+i)^n=\frac{Mi}{R}+1$$

$$\log(1+i)^n=\log\left(\frac{Mi}{R}+1\right)$$

$$n\log(1+i)=\log\left(\frac{Mi}{R}+1\right)$$

$$n=\frac{\log\left(\frac{Mi}{R}+1\right)}{\log(1+i)}$$

Cálculo del número de rentas cuando se conoce el monto

$$n = \frac{\log\left(\frac{Mi}{R} + 1\right)}{\log(1+i)}$$

Donde:
n es el número de pagos o rentas
M es el monto de la anualidad
R es la renta
i es la tasa por periodo de capitalización

De la misma manera podemos despejar el número de pagos cuando se conoce el valor presente.

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C$$

$$R\left[1-(1+i)^{-n}\right] = Ci$$

$$1-(1+i)^{-n} = \frac{Ci}{R}$$

$$1-\frac{Ci}{R} = (1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n} = 1-\frac{Ci}{R}$$

$$\log(1+i)^{-n} = \log\left(1-\frac{Ci}{R}\right)$$

$$-n\log(1+i) = \log\left(1-\frac{Ci}{R}\right)$$

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{Ci}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

Cálculo del número de rentas cuando se conoce el valor actual

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{Ci}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

Donde:
n es el número de pagos o rentas
C es el valor actual de la anualidad
R es la renta
i es la tasa por periodo de capitalización

Ejemplos

1. ¿Cuántos pagos mensuales de $120 deben efectuarse para cancelar una deuda de $2 032 con 36% de interés anual capitalizable mensualmente?

Solución

Se identifican los datos:

C=$2 032

Se trata de un problema de valor actual ya que se tiene el valor de la deuda.

R=$120 mensuales

$$i = \frac{0.36}{12} = 0.03$$

El valor que se va a buscar es el número de pagos, y debido a que uno de los datos con los que se cuenta es el valor actual, se utilizará la fórmula que pide como referencia el valor actual:

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{Ci}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

Se sustituyen los valores:

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{(2\,032)(0.03)}{120}\right)}{\log(1+0.03)} = -\frac{\log(1-0.508)}{\log 1.03} = -\frac{\log 0.492}{\log 1.03} = -\frac{-0.308034897}{0.012837224}$$

$$n = -(-23.99) = 23.99$$

Significa que se requieren 24 pagos para cubrir la deuda.

Nota: cuando el resultado es decimal, normalmente se ajusta el valor del último pago y se redondea el número de pagos al entero inmediato. En este curso no se realizará el ajuste del último pago, simplemente se redondeará al entero inmediato.

2. ¿Cuántos depósitos trimestrales vencidos de $7 000 deberán realizarse para reunir $150 000 si la cuenta donde se depositan paga 24% anual capitalizable trimestralmente?

Solución

Se identifican los datos:

M=$150 000

Se trata de un problema de monto.

R=$7 000

$$i = \frac{0.24}{4} = 0.06$$

El valor que se va a buscar es el número de depósitos, y como uno de los datos con los que se cuenta es el monto de la anualidad, se utiliza la fórmula que tiene como referencia el monto.

$$n = \frac{\log\left(\frac{Mi}{R} + 1\right)}{\log(1+i)}$$

Se sustituyen los datos:

$$n = \frac{\log\left(\frac{150\ 000(0.06)}{7\ 000} + 1\right)}{\log(1 + 0.06)} = \frac{\log(1.285714286 + 1)}{\log(1.06)} = \frac{\log\ 2.285714286}{\log\ 1.06}$$

$$= \frac{0.359021942}{0.025305865} = 14.19$$

Se requieren 15 depósitos para reunir $150 000.

Nota: cuando el resultado es decimal, normalmente se ajusta el valor del último pago y se redondea el número de pagos al entero inmediato. En este curso no se realizará el ajuste del último pago, simplemente se redondeará al entero inmediato.

Ejercicio 3

1. ¿Cuánto se debe depositar al final de cada bimestre en una cuenta de ahorros para que al final de 5 años se tengan acumulados $240 000, si el banco paga 16% de interés capitalizable bimestralmente?
2. ¿De cuánto deben ser los pagos semestrales vencidos que se pagan por un crédito para la compra de un equipo industrial cuyo costo es $355 000, si se carga 23% de interés capitalizable semestralmente, y la compañía que lo compra conviene liquidarlo en 2 años 6 meses?
3. Calcula el valor de cada pago trimestral vencido, para cancelar una deuda de $650 200, costo de una propiedad adquirida a 15 años de plazo, con 18% de interés capitalizable trimestralmente.
4. Una escuela requiere reparar uno de sus edificios dentro de 5 años. Se estima que el costo de la reparación para entonces será de $260,000, cantidad que se reunirá con depósitos bimestrales vencidos. Si el banco donde se hace el ahorro paga 12% anual capitalizable bimestralmente, ¿cuál deberá ser la renta que se pague al final de cada bimestre?
5. ¿Cuántos pagos de $4 900 al final de cada mes deberá realizar un fabricante de zapatos a su proveedor por cubrir un crédito de $98 000, si acuerda pagar 36% de interés capitalizable mensualmente?

6. ¿Cuántos depósitos semestrales vencidos de $18 000 deberán realizarse para reunir la cantidad de $170 000 si se consigue una tasa de 28% capitalizable semestralmente?

Problemas resueltos

1. ¿Cuál es el valor actual de una renta perpetua de $150 000 anuales, si se considera una tasa efectiva de 39% anual?

Solución

Se identifican los datos:

R=150 000

i=39%=0.39

Se sustituyen los valores en la fórmula para el valor actual de una perpetuidad:

$$A=\frac{R}{i}=\frac{150\,000}{0.39}=384\,615.38$$

El valor actual es $384 615.38.

2. El Señor Gómez deja en su testamento una cantidad para que se distribuya en becas a perpetuidad, asignando rentas semestrales de $320 000. Si la tasa de interés es de 36% anual capitalizable semestralmente, ¿cuál es el valor actual de la herencia?

Solución

Se identifican los datos:

R=320 000

j=36% anual capitalizable semestralmente

Como la tasa de interés que se proporciona es nominal, y lo que se requiere es tasa efectiva, se realiza la conversión utilizando la misma relación que en las unidades anteriores ($i = \frac{j}{k}$).

$$i = \frac{j}{k} = \frac{0.36}{2} = 0.18$$

Se sustituyen los valores:

$$A = \frac{R}{i} = \frac{320\,000}{0.18} = 1\,777\,777.78$$

El valor actual es $1 777 777.78.

3. Una persona ahorra $32 500 al finalizar cada año durante 8 años a 11% anual capitalizable anualmente. ¿Cuánto recibe en total al cabo de los 8 años?

Solución

Se identifican los datos:

R=$32 500

$$i = \frac{0.11}{1} = 0.11$$

n=8 pagos anuales

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$M = 32\ 500\frac{(1+0.11)^8 - 1}{0.11}$$

Realizando las operaciones:

$$M = 32\ 500\frac{(1+0.11)^8 - 1}{0.11} = 32\ 500\frac{(1.11)^8 - 1}{0.11} = 32\ 500\frac{2.30453777 - 1}{0.11}$$

$$M = 32\ 500\frac{1.30453777}{0.11} = 32\ 500(11.85943427) = \$385\ 431.61$$

Significa que recibe en total al final de los 8 años $385 431.61.

4. Una compañía vende equipos de cómputo mediante pagos mensuales vencidos de $1 800 durante 9 meses. Si en estos pagos se acuerda una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es el precio de contado de cada computadora?

Solución

Se identifican los datos:

$R = \$1\ 800$

$$i = \frac{0.24}{12} = 0.02$$

$n = 9$ pagos mensuales

Como la pregunta es: ¿cuál es el precio de contado de cada computadora?, y el precio de contado representa el valor actual, esto significa que se busca el valor presente de los pagos (rentas), por lo tanto al sustituir los datos en la fórmula para el valor presente de una anualidad vencida se tiene:

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$C = 1\ 800\ \frac{1-(1\ +\ 0.02)^{-9}}{0.02}$$

Realizando las operaciones:

$$C = 1\,800\frac{1-(1+0.02)^{-9}}{0.02} = 1\,800\frac{1-(1.02)^{-9}}{0.02} = 1\,800\frac{1-0.836755265}{0.02}$$

$$= 1\,800\frac{0.163244734}{0.02}$$

$$C = 1\,800\,(8.162236705) = 14\,692.03$$

El precio de contado de cada equipo es $14 692.03.

5. La compañía Aluminios Industrializados, S. A. planea comprar equipo dentro de un año, el cual se espera tendrá un costo de $120 000. La compañía puede disponer de pequeñas cantidades al corte mensual, si deposita estas cantidades en una cuenta bancaria que paga 18% de interés con capitalización mensual. ¿Cuánto se debe disponer en el cierre mensual para el depósito en el banco?

Solución

Se identifican los datos:

M=$120 000

$i = \dfrac{0.18}{12} = 0.015$

n=1(12)=12 pagos mensuales

El valor que se va a buscar es la renta, y como uno de los datos con los que se cuenta es el monto de la anualidad, entonces se utiliza la fórmula que tiene como referencia el monto:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$

Se sustituyen los valores y se simplifica:

$$R = \frac{(120\ 000)(0.015)}{(1\ +\ 0.015)^{12} - 1} = \frac{1\ 800}{1.195618171 - 1} = \frac{1\ 800}{0.195618171} = 9\ 201.60$$

Cada depósito debe ser de $9 201.60 cada mes.

6. ¿Cuántos pagos mensuales de $890 deben efectuarse para cancelar una deuda de $10 300 con 18% de interés anual capitalizable mensualmente?

Solución

Se identifican los datos:

C=\$10 300

R=\$890 mensuales

$$i=\frac{0.18}{12}=0.015$$

El valor que se va a buscar es el número de pagos, y debido a que uno de los datos con los que se cuenta es el valor actual, se utilizará la fórmula que pide como referencia el valor actual:

$$n=-\frac{\log\left(1-\frac{Ci}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

Se sustituyen los valores:

$$n=-\frac{\log\left(1-\frac{(10\,300)(0.015)}{890}\right)}{\log(1+0.015)}=-\frac{\log(1-0.173595505)}{\log 1.015}=-\frac{\log\ 0.826404494}{\log\ 1.015}$$

$$=\frac{-0.082807329}{0.006466042249}=-(-12.806)=12.81$$

Significa que se requieren 13 pagos para cubrir la deuda.

Problemas propuestos

1. Calcula el monto de una serie de pagos semestrales vencidos de \$4 000 c/u, durante 3 años y medio, con una tasa de interés de 9% anual capitalizable semestralmente.

2. Calcula el precio de contado de un equipo de cómputo comprado con mensualidades vencidas de \$1 500 c/u durante 12 meses, en los cuales se cargó 11% de interés anual convertible mensualmente.

3. Calcula el número de pagos trimestrales vencidos de $20 000, necesarios para cancelar una hipoteca de $150 000, con una tasa de interés de 12.5% anual capitalizable trimestralmente.

4. El señor Ramírez desea reunir $98 000 para dentro de 3 años, si realiza depósitos iguales los días primero de cada mes, y el banco paga una tasa de 18% anual capitalizable mensualmente. ¿De cuánto deben ser los depósitos mensuales?

5. ¿Cuál es el valor actual de una renta perpetua de $25 000 anuales, si la tasa efectiva de interés promedio es de 12%?

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

1. $6 304 347.83

2. $666 666.67

3. $414 285.71

4. $147 540.00

5. $384 090.00

Ejercicio 2

1. $199 306.29

2. $2 240 655.02

3. $411 461.35

4. $859 905.43

5. $65 903.97

6. $326 375.07

Ejercicio 3

1. $5 322.97
2. $97 263.53
3. $31 504.96
4. $6 408.98
5. 31 rentas.
6. 7 rentas.

Respuestas a los problemas propuestos

1. $32 076.61
2. $16 971.85
3. 9 pagos.
4. $2 072.93
5. $208 333.33

Nombre:	
Grupo:	Número de cuenta:
Profesor:	Campus:

Autoevaluación

1. El señor López deposita $300 mensuales en una cuenta de ahorros que paga 12.5% de interés anual capitalizable mensualmente. La cantidad que habrá reunido en 2 años 2 meses es:

a) $8 905.57
b) $5 919.84
c) $6 919.84
d) $7 919.84

2. El pago anual durante 10 años que debe hacer una persona para liquidar un préstamo de $75 000 con interés de 21% anual capitalizable anualmente es:

a) $17 499.89
b) $18 499.89
c) $19 499.89
d) $20 499.89

3. El número de depósitos semestrales de $5 000 que se requieren hacer, para reunir $174 397.87 si la tasa de interés es de 8.27% convertible semestralmente:

a) 7 depósitos.
b) 23 depósitos.
c) 9 depósitos.
d) 10 depósitos.

4. El señor Martínez deja en su testamento un fideicomiso con valor actual de $2 570 000, del cual se deben otorgar rentas anuales perpetuas a una institución de salud mental. Si la tasa es de 18% efectivo, el valor de las rentas es:

a) $142 777
b) $14 277 777

c) $462 600
d) $4 626 600

5. Armando compró un automóvil con valor de $278 000, el cual acordó pagar con 48 mensualidades vencidas a una tasa de interés de 32% anual capitalizable mensualmente. El valor de cada uno de los pagos mensuales es:

a) $2 922.27
b) $10 335.62
c) $13 344.02
d) $15 792.36