FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

LILIANA PATRICIA OSPINA MARULANDA
SERGIO AUGUSTO CARDONA TORRES
DARÍO ÁLVAREZ MEJÍA

FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

Dario Álvarez Mejía

Licenciado Educación Matemática

Universidad del Quindío

Especialista en Biomatemática

Universidad del Quindío

Magíster en Educación: Desarrollo Humano

Universidad de San Buenaventura Cali

Decano Facultad de Educación

Universidad del Quindío

Liliana Patricia Ospina Marulanda

Licenciada en Matemáticas y Computación

Universidad del Quindío

Magíster en Educación: Desarrollo Humano

Universidad de San Buenaventura Cali

Adscrito al Programa de Licenciatura en Matemáticas

Universidad del Quindío

Sergio Augusto Cardona Torres

Ingeniero de Sistemas

Universidad del Valle

Especialista en Procesos para el Desarrollo de Software

Universidad de San Buenaventura Cali

Adscrito al Programa de Ingeniería de Sistemas y Computación

Universidad del Quindío

Diseño y Diagramación: Cristian Alberto Mendez M.

Fundamentos de la Lógica Matemática

ISBN:

Este libro fue editado usando LaTeX

Armenia Quindío Colombia

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La palabra lógica viene del griego y significa, razón, tratado o ciencia. En matemáticas es la ciencia que estudia los métodos de razonamiento, proporciona reglas y técnicas para determinar si un argumento es valido o no, indica la forma correcta de obtener conclusiones y los métodos adecuados para llegar a ellas. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas y para resolver una multitud de situaciones problémicas.

La lógica matemática estudia las leyes de inferencia en los razonamientos. Por medio de la formalización del lenguaje y de sus reglas básicas, proporciona las herramientas necesarias para poder tratar e intentar resolver rigurosamente problemas que tienen sus orígenes y aplicaciones en diferentes áreas de las ciencias.

Las orientaciones o fuentes sicológicas, sociológicas y pedagógicas que permitieron la elaboración de este libro y su viabilización en el campo profesional y teórico, está orientado a fortalecer el objetivo o propósito general de la Licenciatura en Matemáticas.

Desde la perspectiva sicológica el proceso de enseñanza aprendizaje del pensamiento lógico matemático se asume como una experiencia de vida que se comparte con otros a través de lo que se piensa, hace, siente, vive, interesa y necesita según los niveles de pensamiento y desarrollo emocional basada en la teoría sicológica de Jean Piaget, teniendo en cuenta los periodos de evolución del pensamiento: sensorio-motriz, preoperacional, de las operaciones concretas y el de las operaciones formales.

Desde la perspectiva sociológica se asume como experiencia de vida; quienes comparten la lógica-matemática son capaces de emplearla para: explicar, demostrar, solucionar problemas, crear o diseñar historias, hacer representaciones, poesías, cuentos y concursos orientados a compartir sus significado con quienes pertenecen a otras culturas y para poder analizar, comprender, interpretar, apreciar y transformar los saberes culturales creados por todos.

En general con la enseñanza-aprendizaje de la introducción sistémica al pensamiento lógico-matemático desde la perspectiva pedagógica y la didáctica se busca recrear el pensamiento lógico y deleitarse con él; tanto en lo científico como en lo formal, cotidiano y viceversa.

Los pensamientos sicológico, sociológico y pedagógico le facilitan al maestro su trabajo de mediatización del saber dentro del propósito de potenciar las operaciones formales, que sean la base de la lógica formal matemática y de la lógica popular.

Esta propuesta pretende estudiar la lógica matemática para fortalecer al futuro docente en el estudio de: las proposiciones y conectivos, tablas de verdad, reglas de inferencia, métodos de demostración, lógica de predicados y cuantificadores y el pensamiento matemático.

CAPÍTULO 1

PROPOSICIONES Y CONECTIVOS LÓGICOS

Al finalizar el estudio de está unidad el estudiante estará en condiciones de:

- Determinar cuándo una expresión es una proposición
- Expresar simbólicamente una proposición
- Construir proposiciones compuestas, haciendo uso de los conectivos lógicos.
- Realizar operaciones entre proposiciones, haciendo uso de los conectivos y de los signos de agrupación.
- Identificar proposiciones abiertas y cerradas

1.1. Introducción

El ser humano en sus actividades cotidianas debe comunicarse, esta comunicación puede realizarse de diversas maneras, una de ellas es la comunicación por medio de un lenguaje el cual puede estar constituido entre otras por frases interrogativas, imperativas y frases declarativas. Sólo a través de estas últimas es posible una descripción del conocimiento.

La lógica provee los elementos necesarios para representar el conocimiento a través de métodos de formalización de las frases declarativas. En este capítulo se trabajará la lógica proposicional desde las frases declarativas simples (enunciados o proposiciones) que son los elementos básicos de transmisión del conocimiento humano.

1.2. Proposiciones

Una proposición matemática es un enunciado o expresiones que tienen un significado determinado y que mediante un criterio definido puede ser clasificada inequivocamente como *verdadera o falsa. Una proposición es una frase o enunciado que puede ser evaluada con un valor de verdadero o falso. En lenguajes naturales tales como el español, alemán, inglés, entre otros, las proposiciones no pueden ser imperativas o interrogativas, únicamente pueden ser declarativas.*

Ejemplos:
De acuerdo a lo anterior los siguientes enunciados son proposiciones:

- Los estudiantes van a la marcha.
- Los domingos se descansa.
- El que madruga se lleva lo mejor.
- Java es un lenguaje de programación.
- 5 es un número impar.
- 9 es un número compuesto.

Hay algunos enunciados que no son proposiciones:

- ¿Quién soy?
- ¡Hola amigo!
- ¿Qué hora es?

Los siguientes enunciados no son proposiciones, pues no es posible que se evalúen como verdaderas ni falsas:

- ¡Por favor estudia!
- ¿Cuál es tu fecha de nacimiento?

EJERCICIOS

Determina cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones y cuáles no:

1. ¡Buenos días!
2. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180^0.
3. ¡Oh planeta!
4. ¿Cómo te llamas?
5. $2 + x = 3$.
6. Los planetas giran alrededor del sol.

7. $4 + y > 8$.

8. 2 es el único número par que es primo.

Las proposiciones de forma tradicional se representan con letras minúsculas del alfabeto $p, q, r, s, t, ...$, cada una de estas letras puede recibir el nombre de átomo. La forma de representación será la siguiente:

- p : enunciado o proposición .
- p : $2 \times 3 = 6$.
- q : $3x + 4z = 8$.
- r : $7 < 3$.
- t : Egipto está ubicado en Asia.
- u : Las leonas no son las campeonas.
- v : Java es un lenguaje de programación orientado a objetos.

En la lógica proposicional se puede determinar la validez de las expresiones únicamente desde el punto de vista de su estructura, sin tener en cuenta el significado semántico de tales expresiones.

Por ejemplo si se tiene la expresión:

- Rasputín habita en Armenia.

En esta expresión no se sabe si Rasputín es una persona, es un animal o cualquier otro concepto. Analizando la expresión podemos dar el valor de verdad o falsedad a esta, pero el significado de ella no lo consideraremos relevante.

Otros ejemplos:

- Liliana le dio la vuelta a Argelia.
- Los liberales son los ganadores del torneo.
- Orlando está de fiesta.

1.3. Valor de verdad de las proposiciones

Cuando se dice que una proposición matemática es verdadera o falsa se establece su valor de verdad, y por lo tanto se le da una interpretación a la proposición.

La forma en la cual representaremos la interpretación de la proposición cuando se utilicen átomos será la siguiente:

- v(átomo) = valor de verdad.

Ejemplos:

- p : Todos los números impares son primos.
- $v(p) = F$, a la proposición p se le asignó el valor de falso.
- q : 9 es un número compuesto.
- $v(q) = V$, a la proposición q se le asignó el valor de verdadero.
- $r : 2 + 8 \neq 10$.
- $v(r) = F$, a la proposición r se le asignó el valor de falso.
- s : 19 no es múltiplo de 6.
- $v(s) = V$, a la proposición s se le asignó el valor de verdadero.
- t : Algunos números son pares.
- $v(t) = V$, a la proposición t se le asignó el valor de verdadero.

1.4. Negación de una Proposición

Negar una proposición matemática es convertirla en falsa si es verdadera o en verdadera, si es falsa, el símbolo de la negación es $\neg$.

Ejemplos:
Algunos ejemplos de frases en las que aparece la negación son los siguientes:

- No p.
- Es falso p.
- No es cierto p.

El símbolo de la negación ($\neg$) es un operador unario, inicialmente lo aplicaremos a los átomos, pero después se mostrara como aplicarlo a una expresión compuesta. A continuación se muestran ejemplos en los cuales se aplica la negación de una proposición a los átomos.

Ejemplos:

Valor de verdad de la proposición	**Valor de verdad de la negación de la proposición**
$v(q) =$ Falso	$v(\neg q) =$ Verdadero
$v(\neg p) =$ Verdadero	$v(p) =$ Falso
$v(s) =$ Verdadero	$v(\neg s) =$ Falso

Proposición	***Valor de verdad***	***Negación de la proposición***	***Valor de verdad***
7 es múltiplo de 8	**F**	7 no es múltiplo de 8	**V**
37 es un número primo	**V**	37 no es número primo	**F**
$3 + 5 = 2$	**F**	$3 + 5 \neq 2$	**V**
5 es mayor que 7	**F**	5 no es mayor que 7	**V**
$3 + 7 = 15$	**F**	$3 + 7 \neq 15$	**V**
p	**V**	$\neg p$	**F**
$\neg p$	**V**	p	**F**
s	**V**	$\neg s$	**F**

Ejercicios:

Dadas las siguientes proposiciones establece su valor de verdad y encuentra su negación:

Proposición	***Valor de verdad***	***Negación de la proposición***	***Valor de verdad***
41 es un número primo			
6 no es un número perfecto			
$8 + 5 > 10 - 9$			
24 es múltiplo de 16			
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180			

1.5. Proposiciones Simples y Compuestas

*Se considera que una proposición en su forma más sencilla, se llama **atómica o simple**, y una proposición con más de un verbo, o varios sujetos, o varios predicados, etc, se llama **molecular o compuesta**.*

Una proposición es simple si expresa una sola idea sobre algo.

Ejemplos de proposiciones atómicas o simples:

- p : El cuadrado es un paralelogramo.
- q : María quiere a Juan.
- r : 7 es un número primo.
- s : Canadá es una ciudad.
- t : 17 no es un número compuesto.
- u : $5+3<4+7$

La lógica estudia fórmulas proposicionales simples o compuestas. Los átomos o proposiciones simples son aquellas en los que no es posible encontrar otras proposiciones, mientras que las proposiciones compuestas están conformadas de varias proposiciones simples a través de lo que se denomina conectores lógicos, entre los cuales se encuentran: y, o, si... entonces ..., si y sólo si ... . Un conectivo lógico es por lo tanto un elemento que permite la unión de proposiciones simples.

Una proposición es compuesta si relaciona dos o más proposiciones simples por medio de un conectivo lógico.

Ejemplos de proposiciones moleculares o compuestas:

- m : 3 es un número impar y 2 es un número par.
- n : 24 es divisible por 4 o por 8.
- o : $x^3-8=0$ si y sólo si $x=3$.
- p : El cielo es de color azul o el árbol es verde.
- q : Daniel y Felipe son altos.
- r : Si la demanda crece, entonces las compañías se expanden.
- s : Algunos números son impares y primos.
- t : La vaca es un animal mamífero y cuadrúpedo.
- u : 18 es múltiplo de 9 y divisor de 54, o 18 es divisible por 3.

Analicemos las siguientes proposiciones:

- o : El lapicero es grande.
- p : El lápiz es de color rojo.

- q : La mesa es cuadrada.
- r : 14 es un número par.

Ahora unámoslas con las partículas de enlace

- s : El lápiz es de color rojo y la mesa es cuadrada.
- t : El lápiz es de color rojo o la mesa es cuadrada.
- u : El lapicero es grande si y sólo si el lápiz es de color rojo.
- v : Si la mesa es cuadrada entonces el lapicero es grande.

1.6. Conectivos Lógicos

Las proposiciones compuestas se unen por medio de conectivos lógicos, los cuales son operadores que permiten combinar proposiciones para formar otras. Las proposiciones compuestas tienen mucha capacidad de expresión dentro de la lógica. A continuación se muestran los conectivos lógicos principales.

NOMBRE	CONECTIVO LÓGICO	SÍMBOLO
Conjunción	y	$\wedge$
Disyunción Inclusiva	o	$\vee$
Disyunción Exclusiva	o	$\veebar$
Condicional	si... entonces	$\rightarrow$
Bicondicional	si y sólo si	$\leftrightarrow$

1.7. Conjunción ($\wedge$)

Sean p y q dos proposiciones, entonces la proposición $p \wedge q$ es llamada la conjunción entre la proposición p y la proposición q.
Algunos ejemplos de frases en las que aparece la conjunción son los siguientes:

- p y q
- p pero q
- p sin embargo q
- p no obstante q
- p a pesar de q

La proposición $p \wedge q$ es verdadera únicamente cuando p es verdadera y q es verdadera, es decir, cuando ambas proposiciones son verdaderas a la vez.

Ejemplos:

Algunos ejemplos de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza la conjunción son los siguientes:

- En Colombia hay inflación y no hay crecimiento económico
- El gobernador tiene buenas intenciones sin embargo no tiene presupuesto.
- La oferta es alta no obstante la demanda es muy poca
- El Quindío ganó a pesar de la poca asistencia de hinchas.

Sean las siguientes proposiciones:

- t: 2 es un número par (V)
- **s:** 2 es un número primo (V)
  La conjunción de t con s es: $t \wedge s$ 2 es un número par y primo

  Entonces como t y s son verdaderas, la conjunción es ***verdadera***.

Sean las siguientes proposiciones:

- **w:** $8 = 15 - 7$ (V)
- **r:**$-4 > 0$ (F)
  La conjunción es**:** $r \wedge w$:$8 = 15 - 7$ **y** $-4 > 0$

  Entonces como w es verdadera y r es falsa, por lo tanto la conjunción es ***falsa***.

Sean las siguientes proposiciones:

- **p:** $x \times 0 = x$. (F)
- **q:** $x + 1 = x$. (F)
  La conjunción de p con q es**:** $p \wedge q$**:** $x \times 0 = x \wedge x + 1 = x$

  Entonces como p y q son falsas, la conjunción es ***falsa***.

Sean las siguientes proposiciones

- **t:** $2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^3}{3^2}$.
- **w:** $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$
  La conjunción de t con w es**:** $t \wedge w$:$2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^3}{3^2}$. y $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$

  Entonces como t y w son verdaderas, la conjunción es ***verdadera***.

Un aspecto fundamental es la representación de proposiciones utilizando átomos unidos a través de conectivos lógicos.

Por ejemplo si se tiene la expresión $p \wedge q$, se puede dar una interpretación arbitraria a cada uno de los átomos que componen la expresión.

Por ejemplo $v(p) = V$ y $v(q) = F$, entonces $v(p \wedge q) = F$, dado que al menos una de las interpretaciones es falsa.

A continuación se darán unas formulas proposicionales y se asignarán interpretaciones arbitrarias a los átomos.

Proposición	Interpretación	Evaluación Proposición
$(p \wedge \neg q)$	$v(p) = F$, $v(\neg q) = V$	$v(p \wedge \neg q) = F$

1.8. Disyunción Inclusiva ($\vee$)

La proposición $p \vee q$ es llamada la disyunción inclusiva entre las proposiciones p y q. La proposición $p \vee q$ es falsa, únicamente cuando la proposición p y la proposición q son falsas a la vez.

Algunos ejemplos de frases en las que aparece la disyunción son los siguientes:

- po q o ambos

- Al menos p o q

Algunos ejemplos de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza la disyunción son los siguientes:

- El parcial estaba difícil o mal redactado

Ejemplos:

Sean las siguientes proposiciones:

- **r:** 2 es un número primo. (V)
- **s:** 2 es un número positivo. (V)

La disyunción de r con s es**:** $r \vee s$: 2 es un número primo o positivo.
Entonces como r y s son verdaderas, la disyunción inclusiva es ***verdadera.***

Sean las siguientes proposiciones:

- **t:** $2 + 8 \neq 10$ (F)
- **q:**$5 + 3 \leq 2$ (F)

La disyunción de t con q es: $t \vee q$: $2 + 8 \neq 10$ o $5 + 3 \leq 2$
Entonces como t y q son falsas, la disyunción inclusiva es ***falsa.***

Sean las siguientes proposiciones:

- **u:** El triángulo tiene tres lados. (V)
- **w:** El rectángulo es un pentágono. (F)

La disyunción de u con w es: $u \vee w$:El triángulo tiene tres lados o el rectángulo es un pentágono

Entonces como u es verdadera y w es falsa, la disyunción inclusiva es ***verdadera***

A continuación se darán unas formulas proposicionales y se asignaran interpretaciones arbitrarias a los átomos. El operador que se utilizara es el de la disyunción.

Proposición	Interpretación	Evaluación proposición
$(\neg p \vee \neg q)$	$v(\neg p) = F$, $v(\neg q) = V$	$v(\neg p \vee \neg q) = V$

1.9. Disyunción exclusiva ($\veebar$)

$p \veebar q$ se denomina la disyunción exclusiva, $p \veebar q$ es verdadera, únicamente cuando una de las dos proposiciones es verdadera, pero no ambas a la vez, veamos un ejemplo:

Ejemplos:

Sean las siguientes proposiciones:

- **p:** 2 es un número par. (V)
- **q:** 2 es un número impar. (F)

La disyunción de u con w es $p \veebar q$: 2 es un número par o impar.

Entonces como p es verdadera y q es falsa, la disyunción exclusiva es ***verdadera***

Sean las siguientes proposiciones:

- **t:** 15 es un número primo. (F)
- **w:** 15 es un número compuesto. (V)

La disyunción de u con w es $t \veebar w$: 15 es un número primo o 15 es un número compuesto.

Entonces como t es falsa y w es verdadera, la disyunción exclusiva es ***verdadera***

Algunos ejemplos de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza la disyunción son los siguientes:

-

A continuación se darán unas formulas proposicionales y se asignaran interpretaciones arbitrarias a los átomos. El operador que se utilizara es el de la disyunción Exclusiva.

Proposición	**Interpretación**	**Evaluación proposición**
$(\neg p \veebar \neg q)$	$v(\neg p) = F$, $v(\neg q) = V$	$v(\neg p \veebar \neg q) = V$

1.10. Condicional (→)

Sea p y q dos proposiciones: entonces la proposición, si p entonces q, que se representa $p \rightarrow q$.

Algunos ejemplos de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza la disyunción son los siguientes:

- Si p entonces q
- p sólo si q
- q si p
- p es suficiente para q
- Para q es suficiente p
- No p a menos que q
- q cuando p
- q es necesario para p
- Para p es necesario q

Algunos ejemplos en lenguaje natural son los siguientes:

- Si el sol esta brillando entonces se puede hacer deporte.
- Si Pedro es matemático entonces calcula
- Si un número es par entonces es divisible por 2
- Si un número tiene dos divisores es suficiente para que sea primo
- Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o en 5

La proposición $p \rightarrow q$ es falsa si la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa a la vez.

Ejemplos:

- **p:** $5 + 5 = 10$ (V)
- **q:**$5 \times 2 = 10$ (V)
  El condicional de $p \rightarrow q$ es: Si $5 + 5 = 10$ entonces $5 \times 2 = 10$

  Entonces como p y q son verdaderas, el condicional es ***verdadero***

- **w:** 500 es un número par.
- **z:** 500 no es divisible por 2
  El condicional de $w \rightarrow z$ es: Si 500 es un número par entonces no es divisible por 2.

  Entonces como w es verdadera y z es falsa, el condicional es ***falso***

A continuación se darán unas formulas proposicionales y se asignaran interpretaciones arbitrarias a los átomos. El operador que se utilizara es el condicional.

Proposición	Interpretación	Evaluación proposición
$(\neg q \rightarrow p)$	$v(\neg q) = F$, $v(p) = V$	$v(\neg q \rightarrow p) = F$

1.11. Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Sean p y q dos proposiciones, la proposición p si y sólo si q, que se representa $p \leftrightarrow q$.

Algunos ejemplos de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza el bicondicional son los siguientes:

- *p es necesario y suficiente para q*
- *p si y sólo si q*
- *p si y sólo si q*
- *p es equivalente a q*

La proposición $p \leftrightarrow q$ *es verdadera sólo cuando las dos proposiciones son verdaderas o falsas.*

Algunos ejemplos en lenguaje natural son los siguientes:

- Juan ve si y sólo si no es ciego
- $5+5=10$ si y sólo si $5x2=10$
- 28 es par si y sólo si es divisible por 2
- Un número es compuesto si y sólo si tiene más de dos divisores
- Un número es divisible por 3 si y sólo si al sumar sus cifras el resultado es múltiplo de 3

Ejemplos:

- **y:** $\sqrt[5]{243}=3$ (V)
- **x:** $3^5=243$ (V)

El bicondicional de $y \leftrightarrow w$ es: $\sqrt[5]{243}=3$ si y sólo si $3^5=243$.

Entonces y y x son verdaderas, el bicondicional es ***verdadero***

- **s:** $\lg_4 64=4$ (V)
- **o:** $4^4=64$ (V)

El bicondicional de $s \leftrightarrow o$ es: $\lg_4 64=3$ si y sólo si $4^3=64$

Entonces y y x son verdaderas, el bicondicional es ***verdadero***

A continuación se darán unas formulas proposicionales y se asignaran interpretaciones arbitrarias a los átomos. El operador que se utilizara es el condicional.

Proposición	**Interpretación**	**Evaluación proposición**
$(\neg q \leftrightarrow p)$	$v(\neg q)=F$, $v(p)=F$	$v(\neg q \leftrightarrow p)=T$

1.12. Precedencia de los Conectivos Lógicos

Con el objetivo de evitar las ambigüedades en las formulas proposicionales, se debe establecer un orden de precedencia para aplicar los operadores de una formula proposicional. El siguiente será el orden en el cual se aplicaran los conectivos:

- Primero, los paréntesis
- Segundo, el operador de negación $\neg$.
- Tercero, el operador de conjunción $\wedge$.
- Cuarto, el operador de disyunción $\vee$.
- Quinto, el operador condicional $\rightarrow$.
- Por último, el operador bicondicional $\leftrightarrow$.

Si no se establece esta prioridad de los operadores, es muy posible generar mas de una interpretación para alguna fórmula proposicional.

EJERCICIOS

Lee cuidadosamente el siguiente texto.

Todos los seres de nuestro planeta están destinados a vivir cierto espacio de tiempo. Algunos insectos tienen una existencia efímera. Dentro del reino animal existen muy pocas criaturas que viven más que el ser humano. Muy pocos ejemplares de algunas especies de tortugas se aproximan a los ciento cincuenta años. En el reino vegetal. El pino cardos y las gigantes secoyas llegan a rebasar los cinco mil años.

La máxima edad que puede alcanzar el ser humano, salvo en muy pocas ocasiones es 115 años. A lo largo de la historia se han hecho numerosas demostraciones de ancianidad respecto a personas que sobrepasan uno, dos o tres siglos. Todas ellas envueltas en engaños y fraudes. El japonés Izumi, es la única persona en el mundo que ha demostrado auténticamente sobrepasar esta cifra. Nació el 29 de Junio de 1865 en la isla de Tokunoshima, a 1320 kilómetros de la ciudad de Tokio. Murió a la edad de 117 años. la verdad es que muy pocas personas consiguen apagar sus cien velas.

De acuerdo al texto contesta las preguntas 1-5.

1. El envejecimiento de los seres humanos es:

   a) Más rápido que el de los animales.
   b) Mayor que el de los vegetales.
   c) lnversamente proporcional a la edad de la persona.
   d) Imposible de evitar.

2. Es correcto afirmar que.

   a) El ser humano siempre vive más de 120 años .
   b) Todas las tortugas viven 150 años.
   c) El japonés Izumi nació en Tokio.
   d) El pino cardoso vive más de tres milenios.

3. Es incorrecto aseverar que:

   a) El japonés Izumi murió antes de 1982.
   b) La edad de Izumi no superó los 117 años.
   c) La ciudad de Tokunoshima no queda a una distancia de más de 1320 kilómetros de la ciudad de Tokio.
   d) Los insectos tienen una existencia efímera.

4. Los seres humanos somos longevos porque:

   a) Los insectos se mueren fácilmente.
   b) Las plantas pueden durar 5 000 años.
   c) La edad de lzumi es 117 años.
   d) Dentro del reino animal el ser humano vive más que muchas criaturas.

5. No es cierto que:
   a) No todos los seres humanos pueden celebrar los cien años.
   b) Existe un ser humano que ha cumplido 100 años.
   c) No todas las plantas se han conservado cinco mil años.
   d) La edad mínima que puede alcanzar el ser humano es 115 años.

6. Diga cuáles de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa y justifica tu respuesta:
   - Algunas proposiciones cerradas son compuestas.
   - Sí $x > 0$ entonces $y = 2$es una proposición compuesta y cerrada.
   - $\sqrt{17}x$ No es una proposición.
   - $\sqrt{7} + 12 = \sqrt{144} + \sqrt{7}$ es una proposición cerrada verdadera.

7. De las siguientes proposiciones matemáticas compuestas, selecciona las que sean conjunciones o disyunciones
   - **p:** El salón es bonito y agradable.
   - **q:** Estudio o salgo a descanso.
   - **r:** Si me das un caramelo, entonces te presto mi cuaderno.
   - **s:** $4 \times 3 = 12$ o $4 + 3 = 7$
   - **t:** $5 \times 2 = 10$ si y sólo si $5 + 5 = 10$

8. Dadas las siguientes proposiciones halla:
   - **p:** $6 \times 9 = 54$
   - **q:** $6 + 9 = 54$
   - **r:** $7 \times 9 = 63$
   - **s:** $4 + 7 = 11$

   a. $p \vee q$ **b.** $p \wedge s$ **c.** $q \vee r$ **d.** $r \wedge s$ **e.** $q \vee s$

9. Señale cada proposición atómica con una A y cada proposición molecular con una M y escribir junto a cada proposición molecular el termino de enlace utilizado.

a) La comida será hoy a las tres en punto

b) Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarían

c) El sol calentaba y el agua estaba muy agradable

d) Muchos estudian lógica en el primer año de la carrera

e) Luis es un buen jugador o es muy afortunado

f) $x + y > 2$

g) Si $x = 0$ entonces $x + y = 1$

h) $x = 1$ o $y + z = 2$

i) $y = 2$ y $z = 10$

10. Decir cuales son los términos de enlace de las proposiciones siguientes, decir cuantas proposiciones atómicas se encuentran en cada proposición molecular.

a) Este no es mi día feliz

b) Ha llegado el invierno y los días son más cortos

c) Si usted se da prisa, entonces llegará a tiempo

d) Si $x = 0$ entonces $y = 2$

e) Si $x + y = 2$ entonces $z > 0$

f) $x = 0$ o $y = 1$

g) Si $x = 1$ o $z = 2$ entonces $y = 1$

h) Si $z > 10$ entonces $x + z > 10$ y $y + z > 10$

11. Traducir al lenguaje corriente las proposiciones siguientes en otras que tengan la misma forma, especifique cual es la proposición atómica representada por cada una de las letras.

a) $\neg p \wedge \neg r \vee q$

b) $(p \to q) \vee \neg r$

c) $\neg r \wedge \neg q$

d) $\neg(\neg p \wedge r) \to r$

e) $(p \to q) \wedge (q \to p)$

f) $\neg [(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)]$

12. Diga cual es el conectivo principal de las siguientes proposiciones

a) $\neg p$

b) $\neg(p \to q) \vee (p \wedge q)$

c) $\neg [(p \to q) \vee (p \wedge q)]$

d) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

e) $\neg p \wedge \neg r \vee r$

f) $\neg p \wedge \neg q \vee r \wedge q$

13. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son simples o compuestas, abiertas o cerradas, conjunciones, disyunciones, condicionales o bicondicionales y si es posible halla el valor de verdad.

- **p:** El computador es un medio de comunicación y la bicicleta un medio de transporte
- **q:** El perro es un animal cuadrúpedo o mamífero
- **r:** 1,2 y 7 son los divisores de 14 si y sólo si los múltiplos de 14 son 2 y 7
- **s:** Si un rombo es un cuadrilátero entonces todo cuadrilátero es un rombo

CAPÍTULO 2

TABLAS DE VERDAD

Al finalizar está unidad el estudiante estará en condiciones de:

- Construir la tabla de verdad correspondiente a operaciones combinadas dadas.
- Construir la tabla de verdad para proposiciones compuestas y establecer si son tautologías, contradicciones o indeterminaciones.
- Determinar si un condicional es o no una implicación en una proposición compuesta.
- Determinar si un bicondicional es o no una equivalencia en una proposición compuesta

Un método para analizar los valores de certeza de las proposiciones, es el de poner todas las posibilidades de certeza o falsedad en forma de una tabla. Estas tablas básicas de certeza indican rápidamente si una proposición molecular es verdadera o falsa si se conoce la certeza o falsedad de las proposiciones que la forman. Se dan a continuación las tablas básicas de certeza para los cinco términos de enlace de proposiciones.

El primer paso en la construcción de una tabla de verdad para una fórmula es preguntarnos cuántas posibles combinaciones de la fórmula hay, es decir, en cuántas formas diferentes pueden combinarse los valores de verdad asignados a las fórmulas atómicas que las componen. Si p es una fórmula atómica, p sólo tiene dos combinaciones posibles. Si p tiene dos fórmulas atómicas, existen cuatro combinaciones posibles. Si p tiene tres fórmulas atómicas, sus valores de verdad se pueden combinar de ocho formas diferentes, y así sucesivamente. Así si p tiene n fórmulas atómicas, habrá 2^n combinaciones posibles.

2.1. Tabla de Verdad de la Conjunción

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad de la conjunción comencemos con el siguiente estudio de caso:

Isleny prepara chocolate con leche, pueden suceder entonces las siguientes combinaciones:

1. Que Isleny tenga el chocolate y tenga la leche.
2. Que Isleny tenga el chocolate y no tenga la leche.
3. Que Isleny no el tenga el chocolate y tenga la leche.
4. Que Isleny no tenga el chocolate y no tenga la leche.

¿En cuál de los casos Isleny puede preparar chocolate con leche?

Como podemos observar sólo en el caso 1, puesto que se tiene tanto el chocolate como la leche. En los otros casos no podrá preparar chocolate con leche.

Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Podemos concluir que la conjunción es verdadera si las dos proposiciones simples que la conforman son verdaderas.

Ejemplo:

Construye la tabla de verdad para la siguiente proposición compuesta:

$$(p \wedge q) \wedge r$$

Para construir la tabla de verdad de esta proposición compuesta, primero determinamos cuantas combinaciones se deben realizar, como se tienen 3 proposiciones entonces serían $2^3 = 8$ combinaciones, teniendo en cuenta el orden de precedencia de los conectivos lógicos se construye la tabla de verdad.

(p	$\wedge$	**q)**	$\wedge$	$\neg$	**r**
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**

2.2. Tabla de Verdad de la Disyunción Inclusiva

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad de la conjunción comencemos con el siguiente estudio de caso:

En una oferta de empleo se anuncia que se necesita un empleado para servicio domicilio que tenga bicicleta o motocicleta, pueden darse cuatro posibilidades:

1. Tiene bicicleta o motocicleta.
2. Tiene bicicleta o no tiene motocicleta.
3. No tiene bicicleta o tiene motocicleta.
4. No tiene bicicleta o no tiene motocicleta.

Ahora preguntémonos ¿cuándo es aceptado el empleado?

En el primer caso el empleado es aceptado porque dispone tanto de bicicleta como de motocicleta.

En los casos 2 y 3 también es aceptado porque dispone de al menos una

Sólo en el caso 4 el empleado no es aceptado porque no dispone de ninguno de los dos medios de transporte.

Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Podemos concluir que la disyunción inclusiva es falsa si las dos proposiciones simples que la conforman son falsas.

Ejemplo:

Construye la tabla de verdad para la siguiente proposición compuesta:

$$p \vee (\neg q \vee r)$$

Para construir la tabla de verdad de esta proposición compuesta, primero determinamos cuantas combinaciones se deben realizar, como se tienen 3 proposiciones entonces serían $2^3 = 8$ combinaciones, teniendo en cuenta el orden de precedencia de los conectivos lógicos se construye la tabla de verdad.

p	$\vee$	$(\neg$	**q**	$\vee$	**r**$)$
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**

2.3. Tabla de Verdad de la Disyunción Exclusiva

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad de la disyunción exclusiva comencemos con el siguiente estudio de caso:

Camilo fue a la registraduría a solicitar su cédula de ciudadanía, esta entidad le asignará un número de identificación que termine en par o impar. Pueden darse cuatro posibilidades:

1. Que el número de identificación termine en par o termine impar.
2. Que el número de identificación termine en par o no termine en impar.
3. Que el número de identificación no termine en par o termine en impar.
4. Que el número de identificación no termine en par o no termine en impar.

El primer caso no es posible porque no pueden ocurrir a la vez ambas situaciones

Los casos 2 y 3 pueden ocurrir, ya que sólo se puede asignar al final un número par o impar.

El caso 4 no es posible que ocurran ambas situaciones a la vez.

Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	q	$p\veebar q$
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Podemos concluir que la disyunción exclusiva es verdadera sólo si una de las dos proposiciones simples que la conforman son verdaderas.

Ejemplo:

Construye la tabla de verdad para la siguiente proposición compuesta:

$$\neg p\veebar(q\veebar r)$$

Para construir la tabla de verdad de esta proposición compuesta, primero determinamos cuantas combinaciones se deben realizar, como se tienen 3 proposiciones entonces serían $2^3 = 8$ combinaciones, teniendo en cuenta el orden de precedencia de los conectivos lógicos se construye la tabla de verdad.

$\neg$	$\veebar$	(q	$\veebar$	r)
F	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**F**

2.4. Tabla de Verdad del Condicional

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad del condicional comencemos con el siguiente estudio de caso:

En la siguiente expresión, si Lorena es Ingeniera de Sofware entonces construye programas de computador. Puede suceder que:

1. Lorena es Ingeniera de Sofware, entonces construye programas de computador
2. Lorena es Ingeniera de Sofware, entonces no construye programas de computador
3. Lorena no es Ingeniera de Sofware, entonces construye programas de computador
4. Lorena no es Ingeniera de Sofware, entonces no construye programas de computador

Analicemos cada una de las siguientes posibilidades:

En el **caso 1** Si Lorena es Ingeniera de Sofware, entonces construye programas de computador. Esta afirmación es verdadera.

En el **caso 2** Si Lorena es Ingeniera de Sofware, entonces no construye programas de computador. Esta afirmación es falsa porque para ser Ingeniero de Sofware es necesario que construya programas de computador.

En el **caso 3** Si Lorena no es Ingeniera de Sofware, entonces construye programas de computador. Esta afirmación es verdadera porque alguien puede construir programas de computador sin ser Ingeniero de Sofware.

En el **caso 4** Si Lorena no es Ingeniera de Sofware, entonces no construye programas de computador. Esta afirmación es verdadera.

Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Podemos concluir que la implicación o el condicional tiene valor de verdad falso cuando la primera proposición es verdadera y la segunda proposición es falsa.

Ejemplo:

Construye la tabla de verdad para la siguiente proposición compuesta:

$$(p \to q) \to \neg r$$

Para construir la tabla de verdad de esta proposición compuesta, primero determinamos cuantas combinaciones se deben realizar, como se tienen 3 proposiciones entonces serían $2^3 = 8$ combinaciones, teniendo en cuenta el orden de precedencia de los conectivos lógicos se construye la tabla de verdad.

(p	$\to$	**q)**	$\to$	$\neg$	**r**
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**

2.5. Tabla de Verdad del Bicondicional

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad del bicondicional comencemos con el siguiente estudio de caso:

En la siguiente expresión, un número es compuesto si y sólo si tiene más de dos divisores. Puede suceder que:

Para que un número sea compuesto es necesario que tenga más de dos divisores, y es suficiente que tenga más de dos divisores para que sea compuesto, por lo tanto bicondicional es verdadero cuando las dos proposiciones que lo conforman son verdaderas.

Por otro lado, si un número no es compuesto es porque no tiene más de dos divisores, y es suficiente que no tenga más de dos divisores para que no sea compuesto, por lo tanto bicondicional es verdadero cuando las dos proposiciones que lo conforman son falsas.

Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Podemos concluir que el bicondicional tiene valor de verdad verdadero cuando ambas proposiciones que lo conforman tienen el mismo valor de verdad.

Ejemplo:

Construye la tabla de verdad para la siguiente proposición compuesta:

$$(\neg p \vee q) \longrightarrow \neg r$$

Para construir la tabla de verdad de esta proposición compuesta, primero determinamos cuantas combinaciones se deben realizar, como se tienen 3 proposiciones entonces serían $2^3 = 8$ combinaciones, teniendo en cuenta el orden de precedencia de los conectivos lógicos se construye la tabla de verdad.

$(\neg$	P	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	r
	V		V			V
	V		V			F
	V		F			V
	V		F			F
	F		V			V
	F		V			F
	F		F			V
	F		F			F

2.6. Tautología

Es una proposición compuesta cuya tabla de verdad es siempre verdadera (V), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Ejemplos:

- $\neg(p \wedge q) \quad \longleftrightarrow \quad (\neg p \vee \neg q)$

$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\longleftrightarrow$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
F	V	V	V	$\mathcal{V}$	F	**F**	F
V	V	F	F	$\mathcal{V}$	F	**V**	V
V	F	F	V	$\mathcal{V}$	V	**V**	F
V	F	F	F	$\mathcal{V}$	V	**V**	V

- $(p \vee q) \quad \longleftrightarrow \quad (p \vee q)$

$(p$	$\vee$	$q)$	$\longleftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$q)$
V	**V**	V	$\mathcal{V}$	V	**V**	V
V	**V**	F	$\mathcal{V}$	V	**V**	F
F	**V**	V	$\mathcal{V}$	F	**V**	V
F	**F**	F	$\mathcal{V}$	F	**F**	F

- $[(p \wedge q) \wedge r] \quad \longrightarrow \quad [p \wedge (q \wedge r)]$

$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\wedge$	$r]$	$\longrightarrow$	$[p$	$\wedge$	$(q$	$\wedge$	$r)]$
V	V	V	**V**	V	$\mathcal{V}$	V	**V**	V	V	V
V	V	V	**F**	F	$\mathcal{V}$	V	**F**	V	F	F
V	F	F	**F**	V	$\mathcal{V}$	V	**F**	F	F	V
V	F	F	**F**	F	$\mathcal{V}$	V	**F**	F	F	F
F	F	V	**F**	V	$\mathcal{V}$	F	**F**	V	V	V
F	F	V	**F**	F	$\mathcal{V}$	F	**F**	V	F	F
F	F	F	**F**	V	$\mathcal{V}$	F	**F**	F	F	V
F	F	F	**F**	F	$\mathcal{V}$	F	**F**	F	F	F

2.7. Contradicción

Una proposición cuya tabla de verdad es toda falsa (F), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Ejemplos:

- $\neg(p \vee q) \quad \longleftrightarrow \quad (p \vee q)$

$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\longleftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$q)$
F	V	V	V	$\mathcal{F}$	V	**V**	V
F	V	V	F	$\mathcal{F}$	V	**V**	F
F	F	V	V	$\mathcal{F}$	F	**V**	V
V	F	F	F	$\mathcal{F}$	F	**F**	F

- $\neg\,[(p \vee q) \vee r] \quad \longleftrightarrow \quad [p \vee (q \vee r)]$

$\neg$	$[(p$	$\vee$	$q)$	$\vee$	$r]$	$\longleftrightarrow$	$[p$	$\vee$	$(q$	$\vee$	$r)]$
F	V	V	V	V	V	$\mathcal{F}$	V	**V**	V	V	V
F	V	V	V	V	F	$\mathcal{F}$	V	**V**	V	V	F
F	V	V	F	V	V	$\mathcal{F}$	V	**V**	F	V	V
F	V	V	F	V	F	$\mathcal{F}$	V	**V**	F	F	F
F	F	V	V	V	V	$\mathcal{F}$	F	**V**	V	V	V
F	F	V	V	V	F	$\mathcal{F}$	F	**V**	V	V	F
F	F	F	F	V	V	$\mathcal{F}$	F	**V**	F	V	V
V	F	F	F	F	F	$\mathcal{F}$	F	**F**	F	F	F

2.8. Indeterminación

Es una proposición compuesta cuya tabla de verdad siempre posee falsedad (F) y verdad (V)

EJEMPLOS:

- $(p \vee q) \quad \longrightarrow \quad p$

$(p$	$\vee$	$q)$	$\longrightarrow$	p

V	**V**	V	$\mathcal{V}$	**V**
V	**V**	F	$\mathcal{V}$	**V**
F	**V**	V	$\mathcal{F}$	**F**
F	**F**	F	$\mathcal{V}$	**F**

- $[(p \wedge \neg q) \quad \wedge \quad r] \quad \veebar \quad [(p \vee \neg r) \quad \longrightarrow \quad \neg q]$

$[(p$	$\vee$	$\neg q)$	$\wedge$	$r]$	$\veebar$	$[(p$	$\vee$	$\neg r)$	$\vee$	$\neg q]$
V	V	F	**V**	V	$\mathcal{V}$	V	V	F	**F**	F
V	V	F	**V**	F	$\mathcal{F}$	V	V	V	**V**	F
V	V	V	**V**	V	$\mathcal{F}$	V	V	F	**V**	V
V	V	V	**F**	F	$\mathcal{V}$	V	V	V	**V**	V
F	F	F	**V**	V	$\mathcal{V}$	F	F	F	**F**	F
F	F	F	**F**	F	$\mathcal{V}$	F	V	V	**V**	F
F	V	V	**V**	V	$\mathcal{F}$	F	F	F	**V**	V
F	V	V	**V**	F	$\mathcal{F}$	F	V	V	**V**	V

2.9. Implicación

La proposición $(p \wedge q) \quad \Rightarrow \quad \neg(\neg p \vee \neg q)$ *es una tautología y por lo tanto el condicional* $(\Rightarrow)$ *es una implicación.*

EJEMPLO:

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	$\neg$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
V	**V**	V	$\mathcal{V}$	**V**	F	F	F
V	**F**	F	$\mathcal{V}$	**F**	F	V	V
F	**F**	V	$\mathcal{V}$	**F**	V	V	F
F	**F**	F	$\mathcal{V}$	**F**	V	V	V

2.10. Equivalencia

Si $p \Leftrightarrow q$ *es una tautología, entonces el bicondicional* $(\Leftrightarrow)$ *es llamada una equivalencia y se denota por* $p \Leftrightarrow q$*, el cual se lee* p *si y sólo si* q*, ó* p *es equivalente a* q*.*

EJEMPLOS:

- $[p \wedge q] \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg p \vee \neg q)$

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
V	**V**	V	$\mathcal{V}$	**V**	F	F	F
V	**F**	F	$\mathcal{V}$	**F**	F	V	V
F	**F**	V	$\mathcal{V}$	**F**	V	V	F
F	**F**	F	$\mathcal{V}$	**F**	V	V	V

- $[p \wedge (q \vee r)] \quad \Leftrightarrow \quad [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

$[p$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r)]$	$\Leftrightarrow$	$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$r)]$
V	**V**	V	V	V	$\mathcal{V}$	V	V	V	**V**	V	V	V
V	**V**	V	V	F	$\mathcal{V}$	V	V	V	**V**	V	F	F
V	**V**	F	V	V	$\mathcal{V}$	V	F	F	**V**	V	V	V
V	**F**	F	F	F	$\mathcal{V}$	V	F	F	**F**	V	F	F
F	**F**	V	V	V	$\mathcal{V}$	F	F	V	**F**	F	F	V
F	**F**	V	V	F	$\mathcal{V}$	F	F	V	**F**	F	F	F
F	**F**	F	V	V	$\mathcal{V}$	F	F	F	**F**	F	F	V
F	**F**	F	F	F	$\mathcal{V}$	F	F	F	**F**	F	F	F

EJERCICIOS

1. *Resuelva la siguiente situación problémica:*

   Mayerly, Carolina, Carlos y Andrés son deportistas. Una de estas personas practica el baloncesto, otra el voleibol, otra la natación y la otra el tenis de mesa. Un día se reunieron y se sentaron alrededor de una mesa. El practicante de baloncesto estaba a la izquierda de Mayerly. El practicante de natación estaba frente a Carlos. Carolina y Andrés se sentaron juntos. Una mujer se sentó al lado del practicante de voleibol.
   ¿Cuál de estas personas practica el tenis de mesa?

2. Complete la tabla de verdad y deducir la fórmula que genera dicha tabla.

   a)

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	(escriba aquí la expresión lógica)
v	v	v					v
v	v	f					f
v	f	v					v
v	f	f					f
f	v	v					v
f	v	f					f
f	f	v					v
f	f	f					v

b)

p	q	r	$\neg p$	$(\neg p \veebar q)$	$(\neg p \veebar q) \leftrightarrow r$	(escriba aquí la expresión lógica)
v	v	v				v
v	v	f				v
v	f	v				f
v	f	f				f
f	v	v				v
f	v	f				v
f	f	v				f
f	f	f				f

3. Construya la tabla de verdad para las siguientes proposiciones compuestas:

   a) $(p \longrightarrow q) \vee (p \wedge q)$

   b) $(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

   c) $\neg(p \vee q)$

   d) $\neg(p \wedge \neg q)$

   e) $(p \vee q) \rightarrow \neg\,[\neg p \wedge \neg q]$

   f) $(q \leftrightarrow p) \rightarrow (\neg r \vee q)$

   g) $p \rightarrow [(q \rightarrow p) \leftrightarrow (p \rightarrow q)]$

   h) $p \leftrightarrow \neg\,[(p \vee q) \vee (\neg r \wedge s) \wedge (\neg h \vee r)]$

   i) $[(\neg p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg h)] \leftrightarrow [(h \wedge \neg q) \longrightarrow (q \vee p)]$

   j) $[(p \vee \neg q) \wedge r] \leftrightarrow \neg[(p \longrightarrow \neg q) \longrightarrow (\neg r)]$

4. Construir la tabla de verdad para las siguientes proposiciones compuestas y establecer si son tautologías, contradicciones, indeterminaciones, equivalencias o implicaciones.

   a) $[(\neg p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg h)] \leftrightarrow [(h \wedge q) \longrightarrow (q \longrightarrow p)]$

   b) $[(p \longrightarrow q) \wedge r] \leftrightarrow \neg[(\neg p \longrightarrow \neg q) \longrightarrow r]$

   c) $[(p \wedge \neg q) \vee (r \longrightarrow \neg h)] \leftrightarrow [(h \wedge \neg q) \longrightarrow (r \vee \neg p)]$

   d) $[(p \leftrightarrow \neg q)\neg r] \leftrightarrow \neg[(\neg p \longrightarrow q) \longrightarrow r]$

5. Diga cuáles de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa y justifica tu respuesta:

   a) $[(p \wedge q) \longrightarrow r] \leftrightarrow [p \longrightarrow (q \longrightarrow r)]$ es una equivalencia.

   b) $[(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee h)] \leftrightarrow [(h \vee r) \wedge (q \veebar p)]$es una tautología.

   c) $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow \neg[p \vee (q \vee r)]$ es una contradicción.

CAPÍTULO 3

ÁRBOLES SEMÁNTICOS

3.1. Introducción

Los temas que se trataran en este capítulo serán:

- Árboles semánticos
- Concepto de átomo
- Formula proposicional
- Método del Tableaux
- Satisfacibilidad, valides e insatisfacibilidad

3.2. INTERPRETACIONES BOOLEANAS

La semántica permite darle un valor booleano (significado) a cualquier expresión.

Definición 1 *Sea A una fórmula y $p_1, \ldots, p_n$ el conjunto de átomos de A una interpretación para A es una función:*

$$v : \{p_1, \ldots, p_n\} \leftrightarrow \{T, F\}$$

Por ejemplo la fórmula $A: \quad p \wedge q \wedge r$ puede tener la siguiente interpretación:

$\left.\begin{array}{r} v(p) = V \\ v(q) = V \\ v(r) = F \\ v(A) = V \end{array}\right\}$	Es una interpretación para A dado que v asigna valores al menos para los átomos de A

Desde que la fórmula A este representada por un único árbol de formación, v esta bien definido. Esto significa que tomando A y una interpretación v, $v(A)$ tiene exactamente un solo valor

Por lo anterior se usa el concepto de árbol de formación.

EJEMPLO:

Sea la fórmula

$A : p \to q \to p$ y las interpretaciones $\begin{cases} v(p) & = F \\ v(q) & = V \end{cases}$

podría ocurrir

$v(p \to (q \to p)) = V$

$v((p \to q) \to p) = F$

Es por eso la importancia del árbol de formación:

EJERCICIOS:

Dadas las interpretaciones:

$v(p) = F$

$v(q) = F$

$v(r) = V$

$v(s) = V$

Y las fórmulas A_i, describa la interpretación final de la fórmula:

$A_1 = p \to q \to r \to s$

$A_2 = p \to q \equiv \neg p \to \neg q$

$A_3 = p \vee q \vee s \equiv p \wedge s \vee q$

$A_4 = p \to q \equiv \neg p \vee s$

$A_5 = p \vee q \to q \wedge \neg q \vee p$

$A_6 = p \wedge q \to q \vee p \vee s$

3.3. Equivalencia Lógica

3.3.1. Fórmula Proposicional

Una fórmula proposicional es una combinación de átomos unidos por conectores lógicos. Por ejemplo la fórmula $p \to q \vee r$ es una fórmula proposicional. La notación que se utilizará para representar fórmulas según mediante el uso de las letras mayúsculas.

EJEMPLO:

$A : (p \vee q \vee r)$

$B : (p \to q) \vee (q \to q)$

$C : \neg p \vee q$

Una fórmula proposicional también puede representar un solo átomo.

EJEMPLO:

$A : \neg\neg\neg p$
$B : \neg\neg q$
$C : r$

3.3.2. Equivalencia Lógica

Dos fórmulas A y B son lógicamente equivalentes cuando para toda interpretación v, sus valores de verdad son iguales ($v(A) = v(B)$). Como se conocen los valores de verdad para todos los átomos de la fórmula, es posible verificar las interpretaciones de v para cada fórmula.

EJEMPLO:

Sean las fórmulas $A : (\neg p \vee \neg q)$ y $B(\neg q \vee \neg p)$. Vamos a verificar si $A \leftrightarrow B$. Para ello construiremos la tabla de verdad para $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg q \vee \neg p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$	$\leftrightarrow$	$\neg q \vee \neg p$
V	V	F	F	F		F
V	F	F	V	V		V
F	V	V	F	V		F
F	F	V	V	V		V

EJEMPLO:

Sean las fórmulas: $A : (\neg p \wedge q)$ y $B : (q \wedge p)$, verificar si son lógicamente equivalentes.

p	q	$\neg p$	$(\neg p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$q \wedge p$
V	V	F	F		V
V	F	F	F		F
F	V	V	T		V
F	F	V	F		F

EJERCICIOS:

Verificar si las siguientes pares de fórmulas (A y B) lógicamente equivalentes:

1. $A :\ (p \rightarrow q) \vee s$ $\qquad B :\ s \vee (p \rightarrow q)$
2. $A :\ (p \vee q) \wedge \neg q$ $\qquad B :\ (\neg q \vee q) \wedge (p \vee q)$
3. $A :\ s \rightarrow q$ $\qquad B :\ (\neg q \vee \neg s)$
4. $A :\ (\neg r \wedge \neg t)$ $\qquad B :\ (t \vee \neg r)$

A continuación se muestra más equivalencias lógicas que se dejan para ser verificado por el lector

$A\vee$ Verdadero $\leftrightarrow$ Verdadero
$A\vee$ Verdadero $\leftrightarrow A$
$A\wedge$ Verdadero $\leftrightarrow$A
$A\wedge$ Falso $\leftrightarrow$ Falso

$A\vee$ Verdadero $\leftrightarrow$ verdadero
$A\vee$ Falso $\leftrightarrow$ A
$A \rightarrow$ Verdadero $\leftrightarrow$Verdadero
$A \rightarrow$ Falso $\leftrightarrow \neg A$

$A \leftrightarrow \neg\neg A$
$A \leftrightarrow A \wedge A$
$A \vee \neg A \leftrightarrow$ Verdadero
Verdadero $\leftrightarrow A \rightarrow A$
Verdadero $\leftrightarrow A \equiv A$
$\neg A \leftrightarrow A \uparrow A$

$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
$A \equiv B \leftrightarrow B \equiv A$
$A \uparrow B \leftrightarrow B \uparrow A$
$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

$A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
$A \equiv (B \equiv C) \leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$

$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$

$A \equiv B \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \vee B \leftrightarrow \neg A \rightarrow B$

$A \rightarrow B \leftrightarrow A \equiv (A \wedge B)$
$A \wedge B \leftrightarrow (A \equiv B) \equiv (A \vee B)$

$A\wedge$ Verdadero $\leftrightarrow$ A
$A\wedge$ Falso $\leftrightarrow$ Falso
Verdadero $\rightarrow A \leftrightarrow A$
Falso $\rightarrow A \leftrightarrow$ Verdadero

$A \leftrightarrow A \vee A$

$A \wedge \neg A \leftrightarrow$ Falso

Falso $\leftrightarrow A \neq A$
$\neg A \leftrightarrow A \downarrow A$

$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$
$A \neq B \leftrightarrow B \neq A$
$A \downarrow B \leftrightarrow B \downarrow A$

$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
$A \neq (B \neq C) \leftrightarrow (A \neq B) \neq C$

$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
$A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
$A \wedge B \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$
$A \rightarrow B \leftrightarrow B \equiv (A \vee B)$
$A \equiv B \leftrightarrow (A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$

EJERCICIOS

Indicar si los siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes
$A \equiv B \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
$A \equiv B \leftrightarrow (B \rightarrow A) \vee (A \rightarrow B)$
$A \rightarrow B \leftrightarrow A \equiv (A \wedge B)$
$A \rightarrow B \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B)$
$A \equiv B \leftrightarrow (A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$
$A \vee B \leftrightarrow \neg A \rightarrow B$

3.4. SATISFACIBILIDAD

Una formula proposicional A es satisfacible si su valor es verdadero en alguna interpretación. Una interpretación satisfecha es llamada un modelo para A.

3.5. VALIDEZ

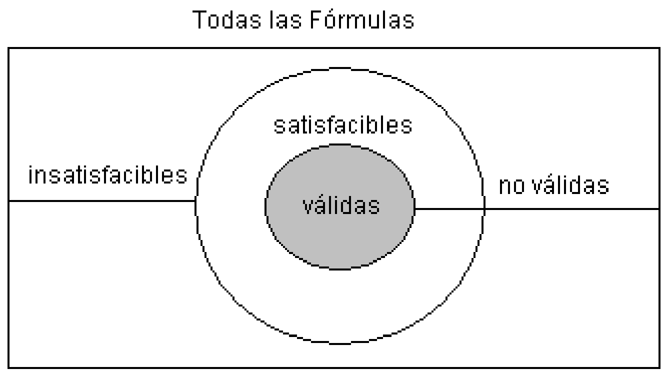
Una formula A es válida si su valor es verdadero en toda interpretación.

3.6. INSATISFACIBILIDAD

Una formula proposicional es insatisfacible o contradictoria si no es satisfacible, es decir, si su valor es falso en toda interpretación. Una formula proposicional es no-valida o falseable si no es válida, esto es, si su valor es falso en alguna interpretación.

La relación existente entre estos conceptos se muestra en la siguiente figura. Si el área del rectángulo representa todas las formulas, la parte exterior del circulo mas grande representa las formulas insatisfacibles, el área del circulo mas grande representa aquellas formulas satisfacibles y el área del circulo interno representa aquellas formulas satisfacibles no exactamente en una interpretación, son en todas, esto es las formulas validas.

Las formulas no validas incluye formulas insatisfacibles así como aquellas que son verdad en alguna interpretación pero no en otras representadas por el anillo externo del circulo interior.



Ejemplos:

Sea la formula $A = (p \wedge q) \rightarrow p$

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

A es una formula válida ya que cada línea de esta tabla de verdad es evaluada como verdadera.

Sea $A = (\neg p \wedge \quad \neg q) \wedge (p \vee q)$

p	Q	$(\neg p \wedge \quad \neg q)$	$(p \vee q)$	$(\neg p \wedge \quad \neg q) \wedge (p \vee q)$
T	T	F	T	F
T	F	F	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F

A es una formula insatisfacible ya que cada línea de esta tabla de verdad es evaluada como falsa. La fórmula $A = (p \wedge q)$ es satisfacible pero no válida, puesto que evalúa tanto un valor verdadero como tres valores falsos.

Teorema 1 *Una formula A es valida si y solo si $\neg A$ es insatisfacible. A es satisfacible si y solo si $\neg A$ es no válida.*

Definición 2 *Dadas unas clases de formulas U, un algoritmo es un procedimiento de decisión para U si dada una formula arbitraria A, este termina y retorna la respuesta "Si"si $A \in U$ y "No"si $A \neq U$*

Se esta interesado en procedimientos de decisión para satisfacibilidad y validez, por el anterior teorema, un procedimiento de decisión para satisfacibilidad puede ser usado como un procedimiento de decisión para validez.

Para decidir si A es valida, aplique el procedimiento de decisión para satisfacibilidad de $\neg A$. Si esto reporta que $\neg A$ es satisfacible, entonces A es no valida y si reporta que $\neg A$ es no satisfacible, entonces A es valida. Tal procedimiento de decisión es llamado usualmente procedimiento de decisión de refutación porque estamos probando validez, para una formula buscando refutar su negación.

Un procedimiento de decisión para satisfacibilidad en el cálculo proposicional esta inmediatamente desde la definición. Ya que alguna formula contiene un número finito de átomos hay un número finito de interpretaciones y podemos verificar estos por medio de la fuerza bruta. Este algoritmo es llamado el método de las tablas de verdad porque la computación puede ser ordenada en forma tabular. El método de las tablas de verdad es ineficiente.

3.7. Tableros Semánticos

Es un algoritmo[1] eficiente en el calculo Proposicional. El principio es muy simple para verificar satisfacibilidad, busca sistemáticamente para un modelo.

Definición 3 *Un literal es un átomo o la negación de un átomo, $p, \neg p$, es un par complementario de literales si p es un átomo.*

Definición 4 *Para alguna formula A, $A, \neg A$ es un par complementario de formulas. A es el complemento de $\neg A$ y viceversa.*

Para alguna formula A, $\{A, \neg A\}$ es un par complementario de formulas. A es el complemento de $\neg A$ y viceversa.

Considere la formula $A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$ y sea v una interpretación arbitraria para A:

- $v(A)$ =si y solo si ambos $v(p) = T$ y $v(\neg q \vee \neg p) = T$
- como v(A) = T si y solo si cualquier:

1. $v(p) = T$ y $v(\neg q) = T$ o
2. $v(p) = T$ y $v(\neg p) = T$

[1]Conjunto de pasos ordenados y finitos que buscan la consecuencia de un objetivo

Así A es satisfacible si y solo si hay una interpretación tal que tenga **1.**, o una interpretación tal que tenga **2.**. Tenemos reducida la pregunta de satisfacibilidad de A para preguntas acerca de la satisfacibilidad del conjunto de literales. Es fácil ver que un conjunto de literales es satisfacible si y solo si no contiene un par complementario de literales, ya que alguna formula contiene un conjunto finito de literales, hay a lo mas un numero finito de conjunto de literales y es trivial decidir si la condición esta dada para algún conjunto.

En el primer ejemplo, el primer conjunto de literales $\{p, \neg q\}$ no contiene un par complementario de literales, de aquí el conjunto es satisfacible y podemos concluir que A es satisfacible. Además podemos indicar un modelo de A.
$v(p) = T$
$v(q) = F$

Ahora consideramos la formula

$$B = (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \quad \neg q)$$

- $v(B) = T$ si y solo si $v(p \vee q) = T$ y $v(\neg p \wedge \quad \neg q) = T$

Como $v(B) = T$ si y solo si $v(p \vee q) = T$, $v(\neg p) = Tyv(\neg q) = T$

Como v(B) = T si y solo si cualquiera

1. $v(p) = v(\neg p) = v(\neg q) = T$o

2. $v(q) = v(\neg p) = v(\neg q) = T$

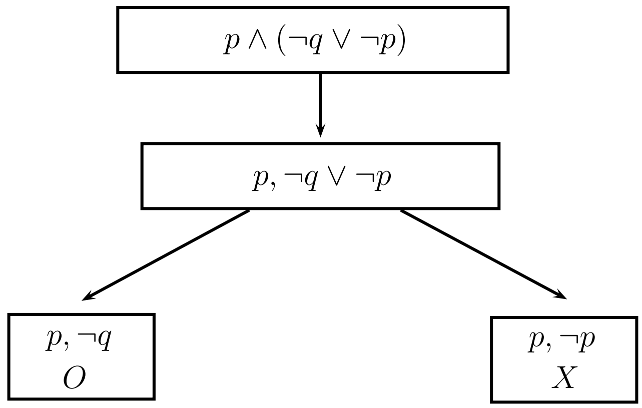
Ya que ambos conjuntos contienen un par complementario de literales, ningún conjunto de literales es satisfacible, y concluimos que es imposible encontrar un modelo para B, es decir B es insatisfacible.

La búsqueda sistemática es fácil para conducir si es mostrada en un modelo tabular o en forma gráfica.

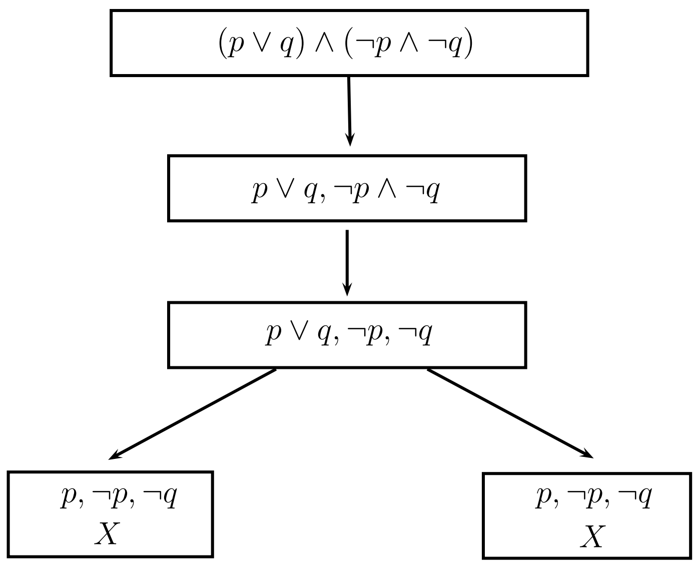
Escojamos el uso de un árbol, donde la formula original esta en la raíz del árbol y el conjunto de formulas creadas por la búsqueda. Como aparece al interior de los nodos de literales o que deben ser satisfacibles.

Una hoja contiene un conjunto complementario de literales que será marcado con una X mientras una hoja satisfacible será marcado con una O.

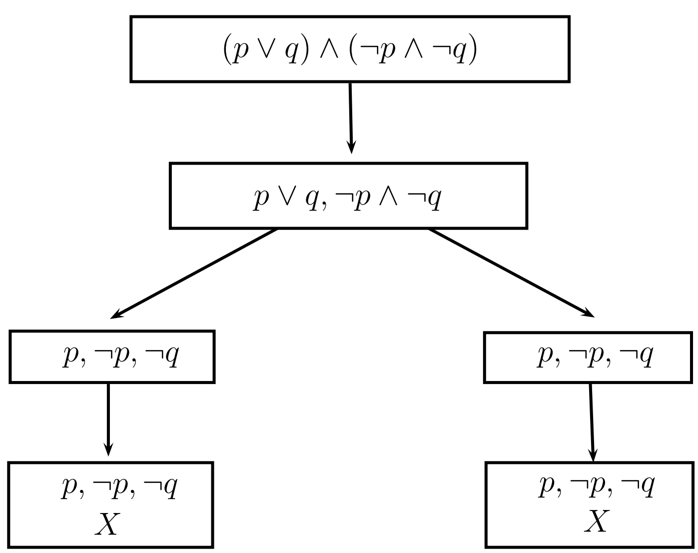
El árbol etiquetado que resulta es llamado tablero semántico. Un tablero para la formula A, se muestra en el siguiente esquema:



Un tablero para la formula B se muestra a continuación:



Otra alternativa para representar la formula $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \quad \neg q)$, se representa en el siguiente tablero.



Aunque la formación del árbol de una formula es única, pueden haber diferentes tableros para una formula. Durante la descomposición de una formula, un conjunto de subformulas son creadas y subsecuentes pasos de la descomposición, pueden escoger elementos de esos conjuntos en orden arbitrario.

Una presentación concisa de las reglas de tablero semántico, pueden ser dadas, si las formulas son clasificadas de acuerdo a su conectivo principal, si la formula es una negación, la clasificación, toma entre considerar ambas la negación y el conectivo principal. Hay dos tipos de reglas.

α- son conjuntivas y estas satisfacen solo si ambas subformulas α_1 y α_2 son satisfacibles

β - son disyuntivas y estas satisfacen aun usando solo una de las dos subformulas β_1 o β_2 es satisfacible.

α	α_1	α_2
$\neg\neg A$	A	
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \Rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$A_1 \equiv A_2$	$A_1 \Rightarrow A_2$	$A_2 \Rightarrow A_1$

α - formulas

β	β_1	β_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \Rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \equiv B_2)$	$\neg(B_1 \Rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \Rightarrow B_1)$

β- formulas

3.7.1. Construcción del Tablero Semántico

Cada nodo del tablero T será etiquetado con un conjunto de formulas. Inicialmente T consiste de un solo nodo. La raíz etiquetada con un solo conjunto $\{c\}$. El tablero se construye inductivamente como se sigue:

Escoja una hoja sin marca L en el árbol. L es etiquetado con un conjunto de formulas $U\ (L)$

- Si $U(L)$ es un conjunto de literales verifique si hay un par complementario de literales$\{p, \neg p\}$ en $U\ (L)$.

  - Si es así marque la hoja como cerrada "X"

  - Si no marque la hoja como abierta "O"

- Si $U\ (L)$ no es un conjunto de literales, escoja una formula en U(L).

  - Si la formula es una α - formula A, crea un nuevo nodo L' como un hijo de L y etiquetela L'.

$$U\ (L') = (U\ (l) - \{A\}) \quad U\ \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

Si la formula es una β - formula, se crean dos nuevos nodos L', L" como hijos de L etiquete L' con

$U\ (L') = (U\ (l) - \{B\}) \quad U\ \{\beta_1\}$
Y etiquete con L"
$U\ (L") = (U\ (l) - \{B\}) \quad U\ \{\beta_2\}$
La construcción termina cuando todas las hojas están marcadas con "X" o "O".

Definición 5 *La construcción de un tableau semántico termina.*

Teorema 2 *Sea T un tableau completo para una formula A. A es insatisfacible si y solo si t es cerrado.*

Sea T un tablero completo para una formula A. A es insatisfacible si y solo si t es cerrado.

Teorema 3 *A es satisfacible si y solo si T es Abierto.*

Teorema 4 *A es válido si y solo si el tableau para $\neg A$ se cierra.*

EJERCICIOS

Ejercicios:

1. Para cada fórmula, determina todos sus modelos (esto es, las valoraciones de verdad que hagan que el valor de verdad de la formula sea verdadero).

   - $p \to q \to r \lor s$
   - $q \to p \lor r \lor s$
   - $p \land q \lor r \land \quad \neg q \lor \quad \neg p$
   - $p \to \quad \neg p \to p \to \quad \neg p$
   - $p \to (q \to r \land q)$
   - $q \to \neg(p \land \neg p) \to r$
   - $(p \leftrightarrow q) \land (p \to \quad \neg q) \land p$
   - $(p \land r) \lor (\neg p \land q) \to \quad \neg q$

   Clasifique las anteriores formulas en satisfacibles, insatisfacibles, validas y no validas.

2. Dados los siguientes conjuntos de formulas, determine si son mutuamente satisfacibles o no lo son.

    - $A = \{p \wedge r,\ \neg p \wedge q,\ \neg q\}$
    - $A = \{q \rightarrow p,\ r,\ s\}$
    - $A = \{p \wedge q,\ r,\ \neg q \vee \quad \neg p\}$
    - $A = \{p \rightarrow \quad \neg p,\ \neg p\}$
    - $A = \{p,\ q \rightarrow r,\ \neg q\}$
    - $A = \{q,\ p \wedge \neg p\ , r\}$

3. Dadas las siguientes formulas proposicionales, dibuje su árbol de formación:

    - $p \rightarrow q \rightarrow r \wedge q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
    - $q \rightarrow !(p \wedge \neg p) \rightarrow r \vee s \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r$
    - $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \wedge p \wedge s \leftrightarrow \neg q$
    - $(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow \neg q$

4. Dados los siguientes argumentos, represéntelo en lógica de proposiciones.

    - El uso de venenos en la frontera, es suficiente para que Colombia y Ecuador tengan diferencias, a no ser que el presidente de Bolivia intervenga en el problema territorial.
    - "Nos comemos al que tuvo la idea sólo si tenemos hambre, no obstante es suficiente que no tengamos comida para que tengamos hambre”
    - "Morir es suficiente para desaparecer de este mundo a menos que ames y perdures en los recuerdos de tus seres amados”

5. Determine cuales de las siguientes formulas son lógicamente equivalentes.

    - $((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)) \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q))$
    - $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg((p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$
    - $(\neg p \wedge \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg r) \wedge (p \vee q)) \equiv (\neg p \wedge \neg r) \wedge (p \vee q)$

6. Determine si las siguientes formulas son satisfacibles, insatisfacibles, validas o no-validas.

    - $(p \wedge q) \rightarrow p \rightarrow \quad \neg s \vee \neg p$
    - $(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow \neg q$
    - $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \wedge p$
    - $q \rightarrow !(p \wedge \neg p) \rightarrow r$

7. Encuentre en caso de ser posible un modelo para las formulas expresadas en los puntos 1, 2, 3 y 4.

8. Dadas las siguientes formulas proposicionales, verifique si la formula es satisfacible y genere su respectivo tablero semántico.

   - $r \wedge q \equiv \neg q$
   - $(p \wedge \neg p) \rightarrow (r \vee s)$
   - $\neg(p \rightarrow \quad \neg q) \wedge p$
   - $(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q)$
   - $((\neg p \wedge \neg r) \wedge (p \vee q)) \wedge (p \vee q)$
   - $\neg(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$

9. Dadas las siguientes formulas proposicionales, verifique si la formula es válida y genere su respectivo tablero semántico.

- $((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$
- $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg(p \vee q)$
- $((\neg p \wedge \quad \neg r) \wedge (p \wedge q)) \equiv (\neg p \wedge \neg r)$
- $(p \wedge q) \rightarrow p \rightarrow \neg s \vee \neg p$
- $(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow \neg q$

CAPÍTULO 4

REGLAS DE INFERENCIA

Al finalizar está unidad el estudiante estará en condiciones de:

Realizar demostraciones, haciendo uso de las reglas de inferencia.

La inferencia consiste en partir de un conjunto de proposiciones llamadas premisas y concluir de ellas una proposición que es llamada conclusión.

A continuación se explicarán las 14 reglas de inferencia

4.1. Regla de Ponendo Ponens (P.P)

Esta regla establece que dado un condicional y el antecedente del condicional, podemos concluir el consecuente del mismo condicional.

$$\begin{array}{llcll} \mathbf{1}. & p & \longrightarrow & q & P \\ \mathbf{2}. & p & \ldots & & P \\ \hline \mathbf{C} & q & \ldots & & PP_{1,2} \end{array}$$

EJEMPLOS :

a)

1.	Si 10 es un número par entonces, es divisible por 2 ...	P
2.	10 es par ...	P
C	10 es divisible por 2 ...	$PP_{1,2}$

b) Demostrar: $m \vee n$, sí:

1.	$\neg h$	$\longrightarrow$	$(m \vee n)$	P
2.	$(q \vee p)$	$\longrightarrow$	$\neg h$	P
3.	$(q \vee p)$			P
$\mathbf{C_1 4}$.	$\neg h$			$PP_{2,3}$
C	$(m \vee n)$			$PP_{1,4}$

c) Demostrar: h sí:

1.	p	$\longrightarrow$	q	P
2.	q	$\longrightarrow$	h	P
3.	p			P
$\mathbf{C_1 4}$.	q			$PP_{1,3}$
C	h			$PP_{2,4}$

d) Demostrar:$\neg\neg\, h$, sí:

1.	p	$\longrightarrow$	$\neg q$	P
2.	$\neg q$	$\longrightarrow$	$\neg\neg h$	P
3.	p			P
$\mathbf{C_1 4}$.	$\neg q$			$PP_{1,3}$
C	$\neg\neg h$			$PP_{2,4}$

4.2. Regla de Doble Negación (D.N)

Esta regla establece que la doble negación de una proposición equivale a la misma proposición y viceversa.

1.	q	$\ldots$	P
C	$\neg\neg q$	$\ldots$	DN_1

EJEMPLOS:

a)

1)	No es cierto que 3 no es un número impar ...	P
C)	3 es un número impar ...	DN_1

b) Demostrar :$\neg\neg h$, sí:

1.	q	$\longrightarrow$	h	P
2.	q			P
$\mathbf{C_1 3}$.	h			$PP_{1,2}$
C	$\neg\neg h$			DN_3

c) **Demostrar** :$\neg\neg h$, sí:

1.	h	$\longrightarrow$	$\neg q$	P
2.	$\neg q$	$\longrightarrow$	h	P
3.	h			P
$\mathbf{C_1 4}$.	$\neg q$			$PP_{1,3}$
$\mathbf{C_2 5}$.	h			$PP_{2,4}$
C	$\neg\neg h$			DN_5

4.3. Regla de Tollendo Tollens (T.T)

Esta regla establece que dado un condicional y la negación de su consecuente, podemos concluir la negación de su antecedente.

1.	p	$\longrightarrow$	q	$\ldots$	P
2.	$\neg q$				P
C	$\neg p$			$\ldots$	$TT_{1,2}$

EJEMPLOS :

a)

1)	Si x es un número par entonces es divisible por 2	P
2)	x no es divisible por 2	P
C)	x no es un número par	$TT_{1,2}$

b) **Demostrar** : h, sí:

1.	q	$\longrightarrow$	p	P
2.	$\neg q$	$\longrightarrow$	$\neg\neg h$	P
3.	$\neg p$			P
$\mathbf{C_1 4}$.	$\neg q$			$TT_{1,3}$
$\mathbf{C_2 5}$.	$\neg\neg h$			$PP_{2,4}$
C	h			DN_5

c) **Demostrar** : $x \neq 0$, sí:

1.	$x = y$	$\longrightarrow$	$x = w$	P
2.	$x = w$	$\longrightarrow$	$x = 1$	P
3.	$x = 0$	$\longrightarrow$	$x \neq 1$	P
4.	$x = y$			P
$C_1$5.	$x = w$			$PP_{1,4}$
$C_2$6.	$x = 1$			$PP_{2,5}$
C	$x \neq 0$			$TT_{3,6}$

4.4. Regla de Adjunción (A)

Esta regla establece que dadas dos premisas verdaderas, su conjunción es también verdadera.

1.	p	...	P
2.	q	...	P
C	$p \wedge q$	...	$A_{1,2}$

EJEMPLOS:

a)

1.	Un triángulo tiene tres lados ...	P
2.	La suma de los ángulos interiores es 180^o...	P
C	Un triángulo tiene tres lados y la suma de los ángulos interiores es 180^o...	$A_{1,2}$

b) Demostrar: $\neg\neg\,[\neg h \wedge (p \wedge q)]$, sí

1.	$\neg h$...	P
2.	$p \wedge q$...	P
$C_1$3.	$\neg h \wedge (p \wedge q)$...	$A_{1,2}$
C	$\neg\neg\,[\neg h \wedge (p \wedge q)]$...	DN_3

c) Demostrar: $(r \wedge t) \wedge (t \wedge w)$, si

1.	r...	P
2.	t...	P
3.	w...	P
$C_1$4.	$(r \wedge t)$...	$A_{1,2}$
$C_2$5.	$(t \wedge w)$...	$A_{2,3}$
C	$(r \wedge t) \wedge (t \wedge w)$...	$A_{4,5}$

4.5. Regla I Simplificación (I.S)

Esta regla establece que de la conjunción de dos proposiciones podemos concluir cualquiera de ellas.

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{1}. & p \wedge q & \ldots & P \\ \hline \mathbf{C} & p & \ldots & IS_1 \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{lcll} \mathbf{1}. & p \wedge q & \ldots & P \\ \hline \mathbf{C} & q & \ldots & IS_1 \end{array}$$

EJEMPLOS:

a)

1.	Un número que termine en cero es divisible por cinco y por diez ...	P
C	Un número que termine en cero es divisible por cinco...	S_1

b)

1.	Un número que termine en cero es divisible por cinco y por diez ...	P
C	Un número que termine en cero es divisible por diez...	S_1

c) Demostrar: q, sí:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1}. & \neg s \longrightarrow & \ldots \quad P \\ & [(\neg s \vee \neg q) \wedge (s \wedge \neg\neg q)] & \\ \mathbf{2}. & \neg(p \wedge h) & \ldots \quad P \\ \mathbf{3}. & s \longrightarrow (p \wedge h) & \ldots \quad P \\ \mathbf{C_1 4}. & \neg s & \ldots \quad TT_{2,3} \\ \mathbf{C_2 5}. & (\neg s \vee \neg q) \wedge (s \wedge \neg\neg q) & \ldots \quad PP_{1,4} \\ \mathbf{C_3 6}. & s \wedge \neg\neg q & \ldots \quad IS_5 \\ \mathbf{C_4 7}. & \neg\neg q & \ldots \quad IS_6 \\ \hline \mathbf{C} & q & \ldots \quad DN_7 \end{array}$$

d) Demostrar: $\neg\neg(p \wedge q)$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1}. & \neg[(p \wedge q) \wedge h] \to (p \vee h) & \ldots \quad P \\ \mathbf{2}. & \neg(p \vee h) & \ldots \quad P \\ \mathbf{C_1 3}. & \neg\neg[(p \wedge q) \wedge h] & \ldots \quad TT_{1,2} \\ \mathbf{C_2 4}. & [(p \wedge q) \wedge h] & \ldots \quad DN_3 \\ \mathbf{C_3 5}. & (p \wedge q) & \ldots \quad IS_4 \\ \hline \mathbf{C} & \neg\neg(p \wedge q) & \ldots \quad DN_5 \end{array}$$

4.6. Regla de Tollendo Ponens (T.P)

Esta regla establece que la negación de una de las proposiciones que establece una disyunción, afirma la otra proposición.

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{1}. & p \vee q & \ldots & P \\ \mathbf{2}. & \neg p & \ldots & P \\ \hline \mathbf{C} & q & \ldots & TP_{1,2} \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{lcll} \mathbf{1}. & p \vee q & \ldots & P \\ \mathbf{2}. & \neg q & \ldots & P \\ \hline \mathbf{C} & p & \ldots & TP_{1,2} \end{array}$$

EJEMPLOS:

a)

1.	4 es un número compuesto ó 25 es múltiplo de 3 ...	P
2.	25 no es múltiplo de 3 ...	P
C	4 es un número compuesto ...	$TP_{1,2}$

b) **Demostrar** : $z < 8$, sí:

1.	$(z < w) \vee (z = w)$	...	P
2.	$(z = w) \longrightarrow (w \neq 8)$	...	P
3.	$[(z < w) \wedge (w = 8)] \longrightarrow z < 8$	...	P
4.	$w = 8$	...	P
$\mathbf{C_1 5.}$	$z \neq w$	...	$TT_{2,4}$
$\mathbf{C_2 6.}$	$z < w$	...	$TP_{1,5}$
$\mathbf{C_3 7.}$	$z < w \wedge (w = 8)$	...	$A_{4,6}$
C	$z < 8$	...	$PP_{3,7}$

4.7. Regla II Simplificación (II.S)

Esta regla establece que si una proposición es verdadera, la disyunción de esta premisa con otra cualquiera es siempre verdadera.

1.	p	...	P
C	$p \vee q$	...	$II.S_1$

ó

1.	q	...	P
C	$p \vee q$	...	$II.S_1$

EJEMPLOS:

a)

1.	4 es un número compuesto ó 25 es múltiplo de 3 ...	P
2.	25 no es múltiplo de 3 ...	P
C	4 es un número compuesto ...	$TP_{1,2}$

b) **Demostrar** : $q \vee s$, sí:

1.	$\neg s \longrightarrow [(s \vee \neg\neg q) \wedge (s \wedge \neg q)]$	...	P
2.	$\neg(p \wedge h)$	...	P
3.	$s \longrightarrow (p \wedge h)$	...	P
$\mathbf{C_1 4.}$	$\neg s$	...	$TT_{2,3}$
$\mathbf{C_2 5.}$	$(s \vee \neg\neg q) \wedge (s \wedge \neg q)$	...	$PP_{1,4}$
$\mathbf{C_3 6.}$	$s \vee \neg\neg q$	...	IS_5
$\mathbf{C_4 7.}$	$\neg\neg q$	...	$TP_{4,6}$
$\mathbf{C_5 8.}$	q	...	DN_7
C	$q \vee s$	...	$II.S_8$

c) **Demostrar** :$(s \wedge q) \vee q$, sí:

1.	$\neg s \longrightarrow [(\neg s \vee q) \wedge (s \wedge q)]$	...	P
2.	$\neg(t \wedge r)$	...	P
3.	$s \longrightarrow (t \wedge r)$	...	P
$\mathbf{C_1 4.}$	$\neg s$	...	$TT_{3,2}$
$\mathbf{C_2 5.}$	$(\neg s \wedge q) \wedge (s \wedge q)$	...	$PP_{1,4}$
$\mathbf{C_2 6.}$	$(s \wedge q)$	...	IS_5
C	$(s \wedge q) \vee q$	...	IIS_6

4.8. Regla Transitiva (T)

Esta regla establece que dados dos condicionales donde el consecuente de una coincide con el antecedente del otro, se obtiene un condicional que tiene como antecedente el antecedente del primer condicional y como consecuente el consecuente del segundo condicional.

1.	$p \longrightarrow q$	...	P
2.	$q \longrightarrow h$	...	P
C	$p \longrightarrow h$	...	$T_{1,2}$

EJEMPLOS:

a)

1.	Si y es un número par entonces el cuadrado de y es número par ...	P
2.	Si el cuadrado de y es un número par entonces es divisible por 2...	P
C	Si y es un número par entonces es divisible por 2 ...	$TP_{1,2}$

b) **Demostrar** :$\neg p$, sí:

1.	$(q \longrightarrow h) \wedge p$	...	P
2.	$p \longrightarrow q$	...	P
3.	$\neg h$	...	P
$\mathbf{C_1 4.}$	$q \longrightarrow h$	...	IS_1
$\mathbf{C_2 5.}$	$p \longrightarrow h$		$T_{2,4}$
C	$\neg p$	...	$TT_{3,5}$

4.9. Regla Conmutativa (C)

Esta regla establece que el cambio de orden de las proposiciones en una conjunción o en una disyunción no altera el resultado.

1.	$p \wedge q$	...	P
C	$q \wedge p$	...	C_1

ó

1.	$(x+y=5) \wedge (z=8)$	...	P
C	$(z=8) \wedge (x+y=5)$	...	C_1

EJEMPLOS:

a)

1.	$5 > 3$ o $24 < 30$ ...	P
C	$24 < 30$ o $5 > 3$ ...	C_1

b)

1.	18 es divisible por 9 y 14 es múltiplo de 7...	P
C	14 es múltiplo de 7 y 18 es divisible por 9...	C_1

c) **Demostrar** : $p \vee h$, sí:

1.	$n \longrightarrow \neg q$	...	P
2.	$\neg\neg q$	...	P
3.	$\neg(h \vee p) \longrightarrow n$	...	P
$\mathbf{C_1 4}$.	$\neg n$	...	$TT_{1,2}$
$\mathbf{C_2 5}$.	$\neg\neg(h \vee p)$	...	$TT_{3,4}$
$\mathbf{C_3 6}$.	$h \vee p$	...	DN_5
C	$p \vee h$	...	C_6

4.10. La Regla de Morgan (M)

4.10.1. Regla I

Esta regla establece que de la negación de una conjunción se obtiene la disyunción de las negaciones de las proposiciones.

1.	$\neg(p \wedge q)$	...	P
C	$\neg p \vee \neg q$	...	M_1

EJEMPLO:

1.	Es falso que, un rectángulo tiene 5 lados y 5 ángulos internos...	P
C	Un rectángulo no tiene 5 lados o no tiene 5 ángulos internos ...	M_1

4.10.2. Regla II

Esta regla establece que de la negación de una disyunción se obtiene la conjunción de la negación de las proposiciones.

1.	$\neg(p \vee q)$	...	P
C	$\neg p \wedge \neg q$	...	M_1

EJEMPLOS:

a)

1.	Es falso que, un rectángulo tiene 5 lados o 5 ángulos internos...	P
C	Un rectángulo no tiene 5 lados y no tiene 5 ángulos internos ...	M_1

b) **Demostrar** : $x \neq 0 \vee y \neq 4$, sí:

1.	$x = 0 \longrightarrow y > 5$	...	P
2.	$\neg(y \neq 4)$	...	P
3.	$x + 5 = 7 \longrightarrow x = 0$	...	P
4.	$y > 5 \longrightarrow y \neq 4$	...	P
5.	$(x = 0 \ \wedge \ y = 4) \longrightarrow$ $x + 5 = 7$	...	P
$\mathbf{C_1 6}$.	$x = 0 \longrightarrow y \neq 4$	...	$T_{1,4}$
$\mathbf{C_2 7}$.	$x \neq 0$	...	$TT_{6,2}$
$\mathbf{C_3 8}$.	$x + 5 \neq 7$	...	$TT_{3,7}$
$\mathbf{C_4 9}$.	$\neg(x = 0 \wedge y = 4)$	...	$TT_{5,8}$
C	$x \neq 0 \vee y \neq 4$	...	M_9

c) **Demostrar** : $\neg s \wedge \neg p$, sí:

1.	$\neg q$	...	P
2.	$\neg(p \wedge q)$	...	P
3.	$\neg[(p \wedge q) \vee \neg(s \vee p)] \rightarrow q$	...	P
$\mathbf{C_1 4}$.	$\neg\neg[(p \wedge q) \vee \neg(s \vee p)]$	...	$TT_{3,1}$
$\mathbf{C_2 5}$.	$(p \wedge q) \vee \neg(s \vee p)$	...	DN_4
$\mathbf{C_3 6}$.	$\neg(s \vee p)$	...	$TP_{2,5}$
C	$\neg s \wedge \neg p$	...	M_6

4.11. La Regla Bicondicional (B)

Esta regla establece que de un bicondicional podemos concluir cualquiera de sus condiciones o ambas a la vez y de los dos condicionales se puede concluir el bicondicional.

a)

1.	$p \leftrightarrow q$	...	P
C	$q \longrightarrow p$	...	B_1

b)

1.	$p \leftrightarrow q$	...	P
C	$p \longrightarrow q$	...	B_1

c)

1.	$p \leftrightarrow q$	...	P
C	$q \longrightarrow p \wedge p \longrightarrow q$	...	B_1

d)

$$\begin{array}{ll|l} \mathbf{1}. & q \longrightarrow p & \dots \quad P \\ \mathbf{2}. & p \longrightarrow q & \dots \quad P \\ \hline \mathbf{C} & p \leftrightarrow q & \dots \quad B_1 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{ll|l} \mathbf{1}. & p \longrightarrow q & \dots \quad P \\ \mathbf{2}. & q \longrightarrow p & \dots \quad P \\ \hline \mathbf{C} & q \leftrightarrow p & \dots \quad B_1 \end{array}$$

EJEMPLOS:

a)

1.	1. Si $5 + 5 = 10$ entonces $5 \times 2 = 10 \dots$	P
2.	2. Si $5 \times 2 = 10$ entonces $5 + 5 = 10 \dots$	P
C	$5 + 5 = 10$ si y solo si $5 \times 2 = 10 \dots$	B_1

b) **Demostrar** :q, sí:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1}. & q \leftrightarrow (s \wedge q) & \dots \quad P \\ \mathbf{2}. & \neg[\neg(s \wedge q) \vee r] & \dots \quad P \\ \mathbf{C_1 3}. & \neg\neg(s \wedge q) \wedge \neg r & \dots \quad M_2 \\ \mathbf{C_2 4}. & \neg\neg(s \wedge q) & \dots \quad IS_3 \\ \mathbf{C_3 5}. & s \wedge q & \dots \quad DN_4 \\ \mathbf{C_4 6}. & s \wedge q \longrightarrow q & \dots \quad B_1 \\ \hline \mathbf{C} & q & \dots \quad PP_{5,6} \end{array}$$

c) **Demuestra** :$x^2 = y \leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$, sí:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1}. & x^2 = y \rightarrow y = \pm\sqrt{x} & \dots \; P \\ \mathbf{2}. & y = \pm\sqrt{x} \rightarrow y > x & \dots \; P \\ \mathbf{3}. & (x^2 = y >\rightarrow y > x) \rightarrow (y = \pm\sqrt{x} \rightarrow & \dots \; P \\ & x^2 = y) & \\ \mathbf{C_1 4}. & x^2 = y \rightarrow y > x & \dots \; TT_{1,2} \\ \mathbf{C_2 5}. & y = \pm\sqrt{x} \rightarrow x = y & \dots \; PP_{3,4} \\ \hline \mathbf{C} & x^2 = y \leftrightarrow y = \pm\sqrt{x} & \dots \; B_{1,5} \end{array}$$

4.12. La Regla de Dilema (D)

Esta regla establece que si se tiene la conjunción de dos condicionales con la disyunción de los antecedentes de los condicionales, se obtiene la disyunción de los consecuentes de los condicionales.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1}. & p \longrightarrow q & \dots \quad P \\ \mathbf{2}. & s \longrightarrow h & \dots \quad P \\ \mathbf{3}. & p \vee s & \dots \quad P \\ \hline \mathbf{C} & q \vee h & \dots \quad D_{1,2,3} \end{array}$$

EJEMPLOS:

a)

1.	Si un número termina en cero entonces es divisible por 10 ...	P
2.	Si un número termina en cinco entonces es divisible por 5 ...	P
3.	Un número termina en cero o en cinco	P
C	El número es divisible por 10 o por 5...	$D_{1,2,3}$

b) **Demostrar** :$p \vee (s \wedge t)$, sí:

1.	$s \longrightarrow (s \wedge t)$	...	P
2.	$q \longrightarrow p$	...	P
3.	s	...	P
C₁4.	$s \vee q$	...	IIS_3
C	$p \vee (s \wedge t)$	...	$D_{1,2,4}$

c) **Demostrar** :$\neg p$, sí:

1.	$p \longrightarrow \neg(s \vee q)$	...	P
2.	$h \longrightarrow q$	...	P
3.	$p \longrightarrow s$	...	P
4.	h	...	P
$C_1$5.	$p \vee h$	...	IIS_4
$C_2$6.	$s \vee q$	...	$D_{2,3,5}$
$C_2$7.	$\neg\neg(s \vee q)$	...	DN_6
C	$\neg p$	...	$TT_{1,7}$

4.13. Regla de Simplificación Disyuntiva (S.D)

Esta regla establece que si se tiene la disyunción de una proposición consigo misma, se obtiene la misma proposición.

1.	$(p \vee p)$	...	P
C	p	...	SD_1

EJEMPLOS:

a)

1.	1 es divisible por 1 o 1 es divisible por 1...	P
C	1 es divisible por 1...	SD_1

b) **Demostrar** :$\neg m$, sí:

1.	$\neg(r \wedge t)$	...	P
2.	$\neg t \longrightarrow n$	...	P
3.	$\neg r \longrightarrow n$	...	P
4.	$m \longrightarrow \neg n$	...	P
$\mathbf{C_1 5}$.	$\neg r \vee \neg t$	...	M_1
$\mathbf{C_2 6}$.	$n \vee n$	...	$D_{3,2,5}$
$\mathbf{C_3 7}$.	n	...	SD_6
$\mathbf{C_4 8}$.	$\neg\neg n$	...	DN_7
C	$\neg m$	...	$TT_{4,8}$

c) **Demostrar** :$h \wedge t$, sí:

1.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	...	P
2.	$p \longrightarrow (h \wedge t)$	...	P
3.	$q \longrightarrow (h \wedge t)$	...	P
$\mathbf{C_1 4}$.	$\neg\neg p \wedge \neg\neg q$	...	M_1
$\mathbf{C_2 5}$.	$\neg\neg p$	...	IS_4
$\mathbf{C_3 6}$.	p	...	DN_5
$\mathbf{C_4 7}$.	$p \vee q$	...	IIS_6
$\mathbf{C_5 8}$.	$(h \wedge t) \vee (h \wedge t)$		$D_{2,3,7}$
C	$h \wedge t$	...	SD_8

4.14. Regla Condicional Contrarrecíproca (C.C)

Esta regla establece que si se tiene un condicional, se obtiene un condicional que tiene como antecedente la negación del consecuente del primer condicional y como consecuente la negación del antecedente del primer condicional.

a)

1.	$p \longrightarrow q$	...	P
C	$\neg q \longrightarrow \neg p$	...	CC_1

b)

1.	$\neg q \longrightarrow \neg p$	...	P
C	$p \longrightarrow q$	...	CC_1

c)

1.	$q \longrightarrow p$	...	P
C	$\neg p \longrightarrow \neg q$	...	CC_1

d)

1.	$\neg p \longrightarrow \neg q$	...	P
C	$q \longrightarrow p$	...	CC_1

De **a)** y **b)** se puede deducir que: $p \longrightarrow q \leftrightarrow \neg q \longrightarrow \neg p$

De **c)** y **d)** se puede deducir que: $q \longrightarrow p \leftrightarrow \neg p \longrightarrow \neg q$

EJEMPLOS:

a)

1.	Si un polígono es un cuadrilátero entonces los ángulos interiores suman 360°. . .	P
C	Si los ángulos interiores de un polígono no suman 360° entonces no es un cuadrilátero. . .	CC_1

b)

1.	Si los ángulos interiores de un polígono no suman 360° entonces no es un cuadrilátero. . .	P
C	Si un polígono es un cuadrilátero entonces los ángulos interiores suman 360°. . .	CC_1

c) Demostrar $\neg p \vee q$, sí

1.	$p \longrightarrow q$	. . .	P
2.	$\neg q$	. . .	P
$\mathbf{C_1 3}$.	$\neg q \longrightarrow \neg p$	. . .	CC_1
$\mathbf{C_2 4}$.	$\neg p$	. . .	$PP_{2,3}$
C	$\neg p \vee q$	. . .	IIS_4

d) Demostrar $p \wedge q$ sí

1.	$p \rightarrow t$	. . .	P
2.	$t \longrightarrow \neg s$	. . .	P
3.	$\neg s \longrightarrow (p \wedge q)$	. . .	P
4.	$\neg\neg q$	. . .	P
$\mathbf{C_1 5}$.	$p \rightarrow \neg s$	. . .	$T_{1,2}$
$\mathbf{C_2 6}$.	$p \rightarrow (p \wedge q)$	. . .	$T_{5,3}$
$\mathbf{C_3 7}$.	$\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p$	. . .	CC_6
$\mathbf{C_4 8}$.	$\neg\neg(p \wedge q)$	. . .	$TT_{7,4}$
C	$p \wedge q$	. . .	DN_8

EJERCICIOS

Haciendo uso de las reglas de inferencia, demuestra las siguientes proposiciones.

- Demostrar: r sí:

  1. $q \wedge \neg\neg r$

- Demuestra: h, sí:

  1. $\neg s \longrightarrow (\neg s \vee \neg h) \wedge (s \wedge \neg\neg h)$
  2. $\neg(p \wedge r)$

3. $s \longrightarrow (p \wedge r)$

- Demostrar: $\neg q$, sí:
  1. $\neg s \longrightarrow [(\neg s \vee \neg\neg q) \wedge (s \wedge \neg q)]$
  2. $\neg(p \wedge h)$
  3. $s \longrightarrow (p \wedge h)$
- Demuestra: $\neg(r \vee w)$, sí:
  1. $(r \leftrightarrow w) \longrightarrow \neg s$
  2. $\neg s \longrightarrow \neg(r \vee w)$
  3. $(r \leftrightarrow w)$
- Demuestra: $(\neg s \wedge q)$, sí:
  1. $\neg s \longrightarrow [(\neg s \wedge q) \wedge (s \wedge q)]$
  2. $\neg(t \wedge r)$
  3. $s \longrightarrow (t \wedge r)$
- Demuestra: $\neg r$, sí:
  1. $(q \rightarrow h) \rightarrow q$
  2. $\neg q$
  3. $\neg(h \rightarrow s) \rightarrow (q \rightarrow h)$
  4. $p \rightarrow s$
  5. $r \rightarrow \neg[(p \rightarrow s) \wedge (h \rightarrow s)]$
- Demuestra: $(s \wedge q)$, sí:
  1. $(p \vee t) \wedge (\neg t)$
  2. $p \longrightarrow (s \wedge q)$
- Demuestra: $t > s$, sí:
  1. $(x < w) \vee (w \neq 0)$
  2. $(w = 0)$
  3. $(x < w) \longrightarrow [(x = 4) \wedge (t > s)]$
- Demuestra: $(h \vee \neg q)$,sí:
  1. $\neg s \longrightarrow [(\neg s \wedge q) \wedge (s \vee \neg q)]$
  2. $\neg(p \vee h)$
  3. $s \longrightarrow (p \vee h)$
- Demuestra: $\neg s \wedge \neg p$, sí:
  1. $\neg p$
  2. $\neg(p \wedge q)$
  3. $\neg[(p \wedge q) \vee \neg(s \vee p)]$
- Demuestra: $x^2 = y \leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$, sí
  1. $x^2 = y \longrightarrow y = \pm\sqrt{x}$
  2. $y = \pm\sqrt{x} \longrightarrow y > x$
  3. $(x^2 = y \longrightarrow y > x) \longrightarrow (y = \pm\sqrt{x} \longrightarrow x^2 = y)$
- Demuestra: $p \wedge q$, sí:
  1. $p \longrightarrow t$
  2. $t \longrightarrow \neg s$
  3. $\neg s \longrightarrow (p \wedge q)$
  4. $\neg\neg p$
- Demuestra: $x \neq o \vee y \neq 4$, sí:
  1. $x = 0 \longrightarrow y > 5$
  2. $\neg(y \neq 4)$
  3. $x + 5 = 7 \longrightarrow x = 0$
  4. $y > 5 \longrightarrow y \neq 4$
  5. $(x = 0 \wedge y = 4) \longrightarrow x + 5 = 7$
- Teniendo en cuenta que "$x = 0$" es la negación de "$x \neq 0$", evitar la regla de doble negación en las deducciones siguientes.
- Demostrar: $x = 0$, sí:
  1. $x \neq 0 \longrightarrow x + y \neq y$
  2. $x + y = y$
- Demostrar: $x \neq 0$sí:
  1. $x = y \longrightarrow x = z$
  2. $x = z \longrightarrow x = 1$

3. $x = 0 \longrightarrow x \neq 1$
4. $x = y$

- Demostrar: $x = y$ sí:
  1. $x \neq y \longrightarrow x \neq z$
  2. $x \neq z \longrightarrow x \neq 0$
  3. $x = 0$

- Demostrar: $\tan\theta \neq 0.577$ sí:
  1. $\tan\theta = 0.577 \longrightarrow \sin\theta = 0.500 \wedge \cos\theta = 0.866$
  2. $\sin\theta = 0.500 \wedge \cos\theta = 0.866 \longrightarrow \cot\theta = 1.732$
  3. $\sec\theta = 1.154 \vee \cot\theta \neq 1.732$
  4. $\sec\theta \neq 1.154$

- Demostrar: $x > y \vee y \not< 6$
  1. $x > y \vee x > 5$
  2. $x \not> 5 \vee y \not< 6$
  3. $x + y = 1 \wedge x > y$

- Demostrar: $x \neq 3 \vee 4 > x$, sí:
  1. $5x = 20 \longrightarrow x = 4$
  2. $2x = 6 \vee x \neq 3$
  3. $2x = 6 \longrightarrow \neg(5x - 3 = 17 \longrightarrow x = 4)$
  4. $5x - 3 = 17 \longrightarrow 5x = 20$

- Demostrar: $y + z = 8$
  1. $z = 5 \longrightarrow [(y = 3 \longrightarrow y + z = 8) \wedge z > y]$
  2. $(xy + z = 11 \longrightarrow x = 2) \longrightarrow (y = 3 \wedge z = 5)$
  3. $xy = 6 \longrightarrow x = 2$
  4. $xy + z = 11 \longrightarrow xy = 6$

- Demostrar: $x^2 = 4 \vee x^2 = 9$
  1. $2x^2 - 10x + 12 = 0 \wedge x < 4$
  2. $x^2 - 5x + 6 = 0 \longrightarrow x = 2 \vee x = 3$
  3. $x = 2 \longrightarrow x^2 = 4$
  4. $x = 3 \longrightarrow x^2 = 9$
  5. $2x^2 - 10x + 12 = 0 \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

- Demostrar: $x = 4$ sí:
  1. $x = 5 \vee x < y$
  2. $x > 3 \vee z < 2 \longrightarrow z < x \vee y = 1$
  3. $x < y \longrightarrow z < 2$
  4. $x = 5 \longrightarrow x > 3$
  5. $z < x \longrightarrow x = 4$
  6. $y = 1 \longrightarrow \neg(x > 3 \vee z < 2)$

- Demostrar: $x - y \neq 2$
  1. $\neg(x > y \wedge x + y > 7)$
  2. $x \not> y \longrightarrow x < 4$
  3. $x + y \not> 7 \longrightarrow x < 4$
  4. $x - y = 2 \longrightarrow x \not< 4$

- Demostrar: $x \not< y \wedge x \neq y$ sí:
  1. $y \not> x \leftrightarrow x = y \vee x < y$
  2. $\neg(y < 1 \vee y \not> x)$

- Demostrar: q, sí:
  1. $s \longrightarrow (p \vee q)$
  2. s
  3. $\neg p$

- Demostrar: r, sí:
  1. $s \longrightarrow \neg t$
  2. t
  3. $\neg s \longrightarrow r$

- Demostrar: $s \wedge t$, sí:
  1. $p \wedge r$

2. $p \longrightarrow s$
3. $r \longrightarrow t$

- Demostrar: $\neg s$, sí:
  1. $t \longrightarrow r$
  2. $r \longrightarrow \neg s$
  3. t
- Demostrar: t, sí:
  1. $p \longrightarrow s$
  2. $\neg s$
  3. $\neg p \longrightarrow t$
- Demostrar: $s \wedge t$, sí:
  1. $p \longrightarrow s$
  2. $p \longrightarrow t$
  3. p
- Demostrar: s, sí:
  1. $p \vee q$
  2. $\neg q$
  3. $p \longrightarrow s$
- Demostrar: s, sí:
  1. $t \longrightarrow r$
  2. $\neg r$
  3. $t \vee s$
- Demostrar: $\neg t$, sí:
  1. $p \longrightarrow s$
  2. $p \wedge q$
  3. $(s \wedge r) \longrightarrow \neg t$
  4. $q \longrightarrow r$
- Demostrar: $\neg r$, sí:
  1. $s \vee \neg r$
  2. $t \longrightarrow \neg s$
  3. t
- Demostrar: s, sí:
  1. $p \longrightarrow (q \wedge r)$
  2. p
  3. $t \longrightarrow \neg q$
  4. $t \vee s$
- Demostrar: $\neg q$, sí:
  1. $t \vee \neg s$
  2. s
  3. $q \longrightarrow \neg t$
- Demostrar: $q \vee r$, sí:
  1. $s \longrightarrow \neg t$
  2. t
  3. $\neg s \longrightarrow (q \vee r)$
- Demostrar: s, sí:
  1. $\neg t \vee r$
  2. t
  3. $\neg s \longrightarrow \neg r$
- Demostrar: $\neg r$, sí:
  1. $q \wedge t$
  2. $q \longrightarrow \neg r$
  3. $t \longrightarrow \neg r$
- Demostrar: $y + 8 < 12$, sí:
  1. $x + 8 = 12 \vee x \neq 4$
  2. $x = 4 \wedge y < x$
  3. $x + 8 = 12 \wedge y < x \longrightarrow y + 8 < 12$
- Demostrar: $x < 4 \wedge y < 6$, sí:
  1. $x + 2 < 6 \longrightarrow x < 4$

2. $y < 6 \vee \neg(x + y < 10)$
3. $x + y < 10 \wedge x + 2 < 6$

- Demostrar: $x = 5 \wedge x \neq y$, sí:
  1. $x = y \longrightarrow x \neq y + 3$
  2. $x = y + 3 \vee x + 2 = y$
  3. $x + 2 \neq y \wedge x = 5$
- Demostrar: $y > z$ sí:
  1. $x = y \longrightarrow x = z$
  2. $x \neq y \longrightarrow x < z$
  3. $\neg(x < z) \vee y < z$
  4. $y \neq z \wedge x \neq z$
- Demostrar: $x < 5$ sí:
  1. $x < y \vee x = y$
  2. $x = y \longrightarrow y \neq 5$
  3. $x < y \wedge y = 5 \longrightarrow x < 5$
  4. $y = 5$
- Demostrar: $\neg(y > 7 \vee x = y)$ sí:
  1. $x < 6$
  2. $y > 7 \vee x = y \longrightarrow \neg(y = 4 \wedge x < y)$
  3. $y \neq 4 \longrightarrow \neg(x < 6)$
  4. $x < 6 \longrightarrow x < y$
- Demostrar: $x > 6$ sí:
  1. $x > 5 \longrightarrow x = 6 \vee x > 6$
  2. $x \neq 5 \wedge \neg(x < 5) \longrightarrow x > 5$
  3. $x < 5 \longrightarrow x \neq 3 + 4$
  4. $x = 3 + 4 \wedge x \neq 6$
  5. $x = 3 + 4 \longrightarrow x \neq 5$
- Demostrar: $x = 4$ sí:
  1. $3x + 2y = 18 \wedge x + 4y = 16$
  2. $x = 2 \longrightarrow 3x + 2y \neq 18$
  3. $x = 2 \vee y = 3$
  4. $x \neq 4 \longrightarrow y \neq 3$
- Demostrar: $x < 3$ sí:
  1. $x < 6$
  2. $y > 7 \vee x = y \longrightarrow \neg(y = 4 \wedge x < y)$
  3. $y \neq 4 \longrightarrow \neg(x < 6)$
  4. $x < 6 \longrightarrow x < y$
- Demostrar:$t \vee s$ sí:
  1. $q \vee t$
  2. $q \longrightarrow r$
  3. $\neg r$
- Demostrar:$r \vee \neg t$ sí:
  1. p
  2. $\neg r \longrightarrow \neg p$
- Demostrar: $r \vee \neg s$ sí:
  1. $s \wedge q$
  2. $t \longrightarrow \neg q$
  3. $\neg t \longrightarrow r$
- Demostrar: q sí:
  1. $\neg s$
  2. $t \longrightarrow s$
  3. $\neg t \vee r \longrightarrow q$
- Demostrar: u sí:
  1. $p \wedge \neg t$
  2. $s \longrightarrow t$
  3. $s \vee q$
  4. $q \vee p \longrightarrow u$
- Demostrar: $t \vee q$ sí:
  1. $s \longrightarrow p \wedge q$

2. s
3. $p \wedge q \longrightarrow t$

- Demostrar: $\neg(y < 4) \vee x > 2$ sí:

1. $x > 3 \vee \neg(y < 4)$
2. $x > 3 \longrightarrow x > y$
3. $\neg(x > y)$

- Demostrar:$x > y \vee \neg(y < 6)$ sí:

1. $x > y \vee x > 5$
2. $\neg(x > 5) \vee \neg(y < 6)$
3. $x + y = 1 \wedge x > y$

- Demostrar:$x \neq 3 \vee x > 2$ sí:

1. $x + 2 \neq 5 \vee 2x = 6$
2. $x + 2 \neq 5 \longrightarrow x \neq 3$
3. $2x - 2 = 8 \longrightarrow 2x \neq 6$
4. $x + 3 = 8 \wedge 2x - 2 = 8$

- Demostrar: $\tan 30 = 0.557 \vee \cos 60 = 0.5$ sí:

1. $\sin 30 = 0.5 \longrightarrow \csc 30 = 2$
2. $\sin 30 = 0.5$
3. $\csc 30=2 \longrightarrow \tan 30 = 0.577$

- Demostrar: $x = 5 \wedge x \neq 4$ sí:

1. $x = 2 \longrightarrow x < 3$
2. $x \neq 4 \wedge \neg(x < 3)$
3. $x \neq 2 \vee x > 4 \longrightarrow x = 5$

- Demostrar: $x = 2$ sí:

1. $Dx^3 = 3x^2 \wedge D3 = 0$
2. $Dx^3 = 3x^2 \longrightarrow Dx^2 = 2x$
3. $Dx^2 = 2x \vee Dx^3 = 12 \longrightarrow x = 2$

- Demostrar:$x = 3$ sí:

1. $x - 2 = 1 \wedge 2 - x \neq 1$
2. $x = 1 \longrightarrow 2 - x = 1$
3. $x = 1 \vee x + 2 = 5$
4. $x + 2 = 5 \vee x - 2 = 1 \longrightarrow x = 3$

- Demostrar: $y = x \vee y > x$ sí:

1. $y < 6 \longrightarrow y < x$
2. $\neg(y < 6) \vee x = 5 \longrightarrow y > x$
3. $\neg(y < x)$

- Demostrar: $y < 3 \vee x > 5$ sí:

1. $y < 4 \wedge x = y + 3$
2. $\neg(x \neq y + 3) \longrightarrow x > 2$
3. $\neg(y > 2) \longrightarrow \neg(x > 2)$
4. $y > 2 \vee y = 3 \longrightarrow x > 5$

- Demostrar: $(x = 4 \vee y \neq 8) \wedge x < 3$ sí:

1. $x = y \vee x < y$
2. $y = x + 4$
3. $(x < 3 \vee x > 5) \wedge y = x + 4 \longrightarrow y \neq 8$
4. $x \neq y$
5. $y = 6 \vee x < y \longrightarrow x < 3$

- Demostrar: $\neg t$ sí:

1. $(q \longrightarrow r) \wedge p$
2. $r \longrightarrow t$
3. $(q \longrightarrow r) \longrightarrow \neg t$

- Demostrar: p sí:

1. $\neg r$
2. $\neg p \longrightarrow q$
3. $q \longrightarrow r$

- Demostrar: q sí:

1. $\neg r \longrightarrow s$
2. $s \longrightarrow p \wedge q$

3. $r \longrightarrow t$
4. $\neg t$

- Demostrar: $(2+2)+2=6 \longrightarrow 3+3=6$ sí:

1. $(2+2)+2=6 \longrightarrow 3\times 2=6$
2. $3\times 2=6 \longrightarrow 3+3=6$

- Demostrar: $5x-4=3x+4 \longrightarrow x=4$ sí:

1. $5x-4=3x+4 \longrightarrow 5x=3x+8$
2. $2x=8 \longrightarrow x=4$
3. $5x=3x+8 \longrightarrow 2x=8$

- Demostrar: $z>6 \vee z<y$ sí:

1. $x>y \longrightarrow x>z$
2. $\neg(z>6) \longrightarrow \neg(x>y \longrightarrow z<7)$
3. $x>z \longrightarrow z<7$

- Demostrar: $x=6 \vee x>6$ sí:

1. $x\neq y \longrightarrow y<x$
2. $(x>5 \longrightarrow y<x) \longrightarrow y=5$
3. $y\neq 5 \vee x=6$
4. $x>5 \longrightarrow x\neq y$

- Demostrar: $x>y$ sí:

1. $x\neq y \longrightarrow x>y \vee x<y$
2. $x>y \vee x<y \longrightarrow x\neq 4$
3. $x<y \longrightarrow \neg(x\neq y \longrightarrow x\neq 4)$
4. $x\neq y$

- Demostrar: $\neg(z\neq 5) \vee z>5$ sí:

1. $x=3 \longrightarrow x>y$
2. $x\neq 3 \longrightarrow z=5$
3. $(x=3 \longrightarrow x<z) \longrightarrow \neg(x<z)$
4. $x>y \longrightarrow x<z$

- Demostrar: $x\neq 3 \vee 4<x$ sí:

1. $5x+20 \longrightarrow x=4$
2. $2x=6 \vee x\neq 3$
3. $2x=6 \longrightarrow \neg(5x-3=17 \longrightarrow x=4)$
4. $5x-3=17 \longrightarrow 5x=20$

- Demostrar: $y+z=8$ sí:

1. $z=5 \longrightarrow ((y=3 \longrightarrow y+z=8) \wedge z>y)$
2. $(xy+z=11 \longrightarrow x=2) \longrightarrow (y=3 \wedge z=5)$
3. $xy=6 \longrightarrow x=2$
4. $xy+z=11 \longrightarrow xy=6$

- Demostrar: $x+z=3 \longrightarrow y=3$ sí:

1. $(x+y=5 \longrightarrow y=3) \vee x+z=3$
2. $z\neq 1 \vee (x+z=3 \longrightarrow x+y=5)$
3. $x+y\neq 5 \wedge z=1$
4. $\neg t$

- Demostrar: $x=3 \vee x=2$ sí:

1. $x+y=7 \rightarrow x=2$
2. $y-x=2 \longrightarrow x=3$
3. $x+y=7 \vee y-x=2$

- Demostrar: $x>2 \vee x=2$ sí:

1. $x<y \longrightarrow x=2$
2. $x<y \vee \neg(x<y)$
3. $\neg(x<y) \longrightarrow x>2$

- Demostrar: $y=1$ sí:

1. $2x+y=7 \longrightarrow 2x=4$
2. $2x+y=5 \longrightarrow y=1$
3. $2x+y=7 \vee 2x+y=5$
4. $2x\neq 4$

- Demostrar: $y = 1 \vee y = 9$ sí:
  1. $\neg(x = 2 \vee x = 8) \longrightarrow x = 6$
  2. $2x + 3y = 21 \wedge x \neq 6$
  3. $x = 2 \longrightarrow y = 9$
  4. $x = 8 \longrightarrow y = 1$

- Demostrar: $\neg(\neg(x < z)) \vee \neg(z \neq 6)$ sí:
  1. $x > 5 \vee \neg(y < 6)$
  2. $\neg(y < 6) \longrightarrow x < z$
  3. $x > 5 \longrightarrow y < z$
  4. $\neg(y < z) \wedge z = 6$

- Demostrar: $x \neq 4 \vee x > y$ sí:
  1. $y = 0 \rightarrow xy = 0$
  2. $y = 0 \vee \neg(y < 1)$
  3. $xy = 0 \vee xy > 3 \longrightarrow x \neq 4$
  4. $\neg(y < 1) \longrightarrow xy > 3$

- Demostrar: $y < 12 \vee x < 0$ sí:
  1. $x < y \vee y < x$
  2. $y < x \longrightarrow x > 6$
  3. $x < y \longrightarrow x < 7$
  4. $(x > 6 \vee x < 7) \longrightarrow \neg(y > 11)$
  5. $y > 11 \vee x < 0$

- Demostrar: $x^2 = 4 \vee x^2 = 9$ sí:
  1. $2x^2 - 10x + 12 = 0 \wedge x < 4$
  2. $x^2 - 5x + 6 = 0 \longrightarrow x = 2 \vee x = 3$
  3. $x = 2 \longrightarrow x^2 = 4$
  4. $x = 3 \longrightarrow x^2 = 9$
  5. $2x^2 - 10x + 12 = 0 \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

- Demostrar: q sí:
  1. $\neg(x + 1 > y) \vee \neg(x > 4)$
  2. $(y = 5 \longrightarrow x < y) \wedge x > 1$
  3. $y > 5 \vee y = 5$
  4. $x < y \vee y > 4 \longrightarrow \neg(x + 1 > y) \wedge y < 9$
  5. $y > 5 \longrightarrow y > 4$

- Demostrar: $x = 4$ sí:
  1. $x = 5 \vee x < y$
  2. $x > 3 \vee z > 2 \longrightarrow z < x \vee y = 1$
  3. $x < y \longrightarrow z < 2$
  4. $x = 5 \longrightarrow x > 3$
  5. $z < x \longrightarrow x = 4$
  6. $y = 1 \longrightarrow \neg(x > 3 \vee z < 2)$

- Demostrar: $x < 4$ sí:
  1. $x = y \vee x > y$
  2. $x < 4 \vee \neg(x < z)$
  3. $x = y \longrightarrow x < z$
  4. $x > y \longrightarrow x < z$

- Demostrar: $x = 1$ sí:
  1. $2x + y = 5 \longrightarrow 2x = 2$
  2. $2x + y = 5 \vee y = 3$
  3. $2x = 2 \longrightarrow x = 1$

- Demostrar: $x = 2$ sí:
  1. $x < 3 \vee x > 4$
  2. $x < 3 \longrightarrow x \neq y$
  3. $x > 4 \longrightarrow x \neq y$
  4. $x < y \vee x \neq y \rightarrow x \neq 4 \wedge x = 2$

- Demostrar: $x^2 = 9$ sí:
  1. $x = (+3) \longrightarrow 2x^2 = 18$
  2. $x = (+3) \vee x = (-3)$
  3. $x = (-3) \longrightarrow 2x^2 = 18$
  4. $2x^2 = 18 \longrightarrow x^2 = 9$

CAPÍTULO 5

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Al finalizar está unidad el estudiante estará en condiciones de:

- Decir que método de demostración se ha aplicado en una demostración dada.

Siempre que nos planteamos una demostración tenemos la posibilidad de utilizar varios métodos para llevarla a cabo. Estos métodos son los siguientes:

5.1. Inductivo[1]

Consiste en hacer varias experiencias de las cuales obtenemos siempre la misma relación o conclusión, la cuál adoptamos como conclusión general.

Ejemplo:
Supongamos que un visitante europeo llega a Colombia y las cincuenta personas con las que se comunica le dicen que juegan fútbol, entonces el europeo concluye que todos los colombianos juegan fútbol.

5.1.1. Principio de Inducción

Se quiere mostrar que la proposición $p(n)$ es verdadera para todo valor $n \geq n_0$
Procedimiento:

1. Suponemos que $P(n_0)$ es verdadera
2. Si $p(k)$ es verdadero para algunos valores $k \geq n_0 \Rightarrow p(k+1)$ debe ser verdadera
3. Por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \geq n_0$

[1] El método inductivo nos puede llevar a conclusiones falsas

Ejemplo 1:
Si a es un número real, definimos $a^1 = a$ y $a^{n+1} = a^n.a$ probar que, para $n \geq 1$, $1^n = 1$

Demostración:

Sea $p(n):\ 1^n = 1$ sea $n_0 = 1$

1. **Paso base** $p(1)$ es verdad porque $1^1 = 1$

2. **Paso de inducción:** Mostrar que para $k \geq 1$, si $p(k)$ es verdad entonces $p(k+1)$ es verdad, o sea que $\forall k \geq 1$ sí $1^k = 1$ es verdad, entonces $1^{k+1} = 1$ es verdad por hipótesis sabemos que:
   $a^1 = aa^{n+1} = a^n.a$ $1^k = 1$, multiplicamos por 1 a ambos lados. $1^k.1 = 1.1$ $1^{k+1} = 1$
   Entonces $p(k+1)$ es verdad por lo tanto la proposición $p(n)$ es verdad.

Ejemplo 2:
Para todo entero $x \neq -1$,$x^{2n} - 1$ es divisible por $x+1$, $\quad n \geq 1$
Sea $p(n)$: $x^{2n} - 1$ es divisible por $x+1$, sea $n_0 = 1$

1. **Paso base:** $p(1)$ es verdad porque $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ y $(x+1)(x-1)$ es divisible por $x+1$

2. **Paso de inducción:** Mostrar que para $k \geq 1$, si $p(k)$ es verdad $\Rightarrow p(k+1)$ también es verdad osea que $\forall k \geq 1$ si $x^{2k} = 1+y(k+1)$ es divisible por $x+1 \Rightarrow$ existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$x^{2k} - 1 = y(x+1) \Rightarrow x^{2k} = 1 + y(k+1)$$

   multiplicamos a ambos lados por $x^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^{2k}.x^2 &= x^2(1 + y(x+1)) \Rightarrow \\ x^{2k+2} &= x^2 + (x+1)(yx^2) \\ x^{2(k+1)} - 1 &= x^2 - 1 + (x+1)(yx^2) \\ x^{2(k+1)} - 1 &= (x+1)(x-1) + (x+1)(yx^2) \Rightarrow \end{aligned}$$

   $x^{2(k+1)} - 1$ es divisible por $x+1 \Rightarrow p(k+1)$ es verdad por lo tanto la proposición $p(n)$ es verdad.

Ejemplo 3:
Demostrar que $\forall \mathbb{Z} \quad n \geq 1$, $3^{2n} - 1$ es divisible por 8
Sea $p(n)$: $3^{2n} - 1$ es divisible por 8 $\forall \mathbb{Z} \quad n \geq 1$

1. **Paso base:** $p(1)$ es verdad $3^{2(1)} - 1 = 8$ es divisible por 8

2. **Paso de Inducción:** Mostrar para $k \geq 1$, si $p(k)$ es verdad $\Rightarrow p(k+1)$ también es verdad osea que.
   $\forall k \geq 1$ si $3^{2k} - 1$ es divisible por 8 entonces existe un $y \in \mathbb{Z}$ tal que

$$
\begin{array}{lcll}
3^{2k} - 1 & = & 8y & \text{sumamos 1 a ambos lados} \\
3^{2k} & = & 8y + 1 & \text{multiplicamos ambos por } 3^2 \\
3^{2k}3^2 & = & 9(8y+1) & \text{aritmética} \\
3^{2(k+1)} & = & 9 + 72y & \text{Restamos a ambos lados 1} \\
3^{2(k+1)} - 1 & = & 9 + 72y - 1 & \text{aritmética} \\
3^{2(k+1)} - 1 & = & 8(1+9y) &
\end{array}
$$

   $\Rightarrow 3^{2(k+1)} - 1$ es divisible por 8 $\Rightarrow p(k+1)$ es verdad por lo tanto la proposición $p(n)$ es verdad.

Ejemplo 4:

Demostremos que para todo $n \geq 1$, 6^n es un número que acaba en 6.

1. Comprobamos que P_1 es cierto:

   para $n = 1$, $6^1 = 6$, luego se cumple para el primer caso

2. Supongamos que P_n es verdadera, es decir, 6^n es un número que acaba en 6.

3. Probemos P_{n+1}, es decir, que 6^{n+1} termina en 6

   - Un entero acaba por 6 si se puede escribir así: $10a + 6$, con a entero positivo o igual a cero. La hipótesis es, pues, $6^n = 10a + 6$. (Aritmética: representación de un número en forma decimal)
   - Entonces $6^{n+1} = 6^n \times 6 = (10a+6)6 = 60a + 36 = 60a + 30 + 6 = 10(6a+3) + 6 = 10c + 6$, con $c = 6a + 3$, entero. (Aritmética)
   - Luego 6^n siempre termina en 6

Ejemplo 5:

Demostrar la siguiente proposición

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1} + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
(2(1)-1)3^1 + (2(2)-1)3^2 + \ldots + (2(n)-1)3^n &= (n-1)3^{n+1} + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
3 + 27 + \ldots + (2(n)-1)3^n &= (n-1)3^{n+1} + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

1. Se analiza si es verdadera para $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1}(2-1)3^1 = (1-1)3^{1+1} + 3 = 3$$

2. Por lo tanto la proposición es verdadera para $n = 1$

   Hipótesis inductiva

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1} + 3$$

   Es verdadera para $\forall n \in \mathbb{N}$

3. Debemos demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)3^k = (n+1-1)3^{(n+1)+1} + 3$$

   luego

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)3^k = n3^{n+2} + 3$$

   Demostración

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1} + 3 + [2(n+1)-1]3^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1} + 3 + (2n+2-1)3^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1} + 3 + (2n+1)3^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)3^k = \left[(n-1)3^{n+1} + (2n+1)3^{n+1}\right] + 3$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)3^k = 3^{n+1}\left[(n-1) + (2n+1)\right] + 3 \quad \text{(sacando factor común)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)3^n = 3^{n+1}3n + 3$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)3^k = n3^{n+2}+3$$

Por lo tanto la proposición es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 6:

Probar la siguiente la siguiente proposición.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} =?$$

para $n=1 \Rightarrow \frac{1}{2}$; para $n=2 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$; para $n=3 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$ se puede inducir que es $\frac{n}{n+1}$, vamos a probarla.

Probar que $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ para todo $n \geq 1$

Sea $P(n) : \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad n_0 = 1$

1. **Paso Base:**
   P(1) es verdad porque $\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{1+1}$

2. **Paso de Inducción:** Sea $k \geq 1$ un valor fijo supongamos que $P(k) : \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ es verdad, se debe mostrar que $P(k) : \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$ es verdad.
   Por hipótesis sabemos que $P(k)$ es verdad.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\cdots+\tfrac{1}{k(k+1)} &= \tfrac{k}{k+1} && \text{Sumamos a ambos lados } \tfrac{1}{(k+1)(k+2)}\\
\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\cdots+\tfrac{1}{k(k+1)}+\tfrac{1}{(k+1)(k+2)} &= \tfrac{k}{k+1}+\tfrac{1}{(k+1)(k+2)}\\
\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\cdots+\tfrac{1}{k(k+1)}+\tfrac{1}{(k+1)(k+2)} &= \tfrac{k(k+1)(k+2)+k+1}{(k+1)^2(k+2)}\\
\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\cdots+\tfrac{1}{k(k+1)}+\tfrac{1}{(k+1)(k+2)} &= \tfrac{(k+1)[k(k+2)+1]}{(k+1)^2(k+2)}\\
\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\cdots+\tfrac{1}{k(k+1)}+\tfrac{1}{(k+1)(k+2)} &= \tfrac{[k^2+2k+1]}{(k+1)(k+2)}\\
\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\cdots+\tfrac{1}{k(k+1)}+\tfrac{1}{(k+1)(k+2)} &= \tfrac{[k+1]^2}{(k+1)(k+2)}\\
\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\cdots+\tfrac{1}{k(k+1)}+\tfrac{1}{(k+1)(k+2)} &= \tfrac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

$P(k+1)$ es verdad, por lo tanto la proposición es verdadera.

Ejemplo 7:
Probar la siguiente proposición:

$$(1-x)[(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})] = 1 - x^{2^{n+1}}$$

Sea $P(n) : (1-x)[(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})] = 1 - x^{2^{n+1}}, \qquad \forall n \geq 1$

1. **Paso Base:**
   $P(1)$ es verdad porque
   $$\begin{aligned} (1-x)[(1+x)(1+x^2)] &= 1-x^4 \\ 1-x^4 &= 1-x^4 \end{aligned}$$

2. **Paso de Inducción**
   Asumamos $n = k$ y que se cumple para
   $P(k) : (1-x)[(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^k})] = 1 - x^{2^{k+1}}$ probar que se cumple para $P(k+1)(1-k)[(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^{k+1}})] = 1 - x^{2^{k+2}}$

   Por hipótesis sabemos que $P(k)$ es verdad.
   $$\begin{aligned} (1-x)[(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^k})] &= 1 - x^{2^{k+1}} \qquad \text{Multiplicamos por } 1+x \\ (1-x)[(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^k})(1+x^{2^{k+1}})] &= (1-x^{2^{k+1}})(1+x^{2^{k+1}}) \\ \underbrace{(1-x)[(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^k})}_{1-x^{2^{k+1}}}(1+x^{2^{k+1}})] &= 1 - x^{2^{(k+1)+1}} \\ (1-x^{2^{k+1}})(1+x^{2^{k+1}}) &= 1 - x^{2^{k+2}} \\ 1 - x^{2^{(k+1)+1}} &= 1 - x^{2^{k+2}} \\ 1 - x^{2^{k+2}} &= 1 - x^{2^{k+2}} \end{aligned}$$

   Se Cumple para $P(k+1)$, entonces la proposición es verdadera.

Ejemplo 8: Demuestre la siguiente identidad trigonométrica

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx) \qquad \text{Teorema de Moivre}$$

Sea $P(n) : (\ \cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx) \qquad \forall n \geq 1$

1. **Paso Base**
   $P(1)$ es verdad, porque $\cos x + i\sin x = \cos x + i\sin x$

2. **Paso de Inducción**
   Asumamos que $n = k$, mostrar que si $P(k) : (\cos x + i\sin x)^k = \cos(kx) + i\sin(kx)$ es verdad, probar que $P(k+1) : (\cos x + i\sin x)^{k+1} = \cos((k+1)x) + i\sin((k+1)x)$ es verdad.

   Por hipótesis se sabe que $P(k)$ es verdad, veamos para $P(k+1)$

$$\begin{aligned}
(\cos x + i\sin x)^{k+1} &= \underbrace{(\cos x + i\sin x)^k}_{\cos(kx)+i\sin(kx)}(\cos x + i\sin x) && \text{por hipótesis, entonces}\\
(\cos x + i\sin x)^{k+1} &= [\cos(kx) + i\sin(kx)](\cos x + i\sin x)\\
(\cos x + i\sin x)^{k+1} &= \cos x\cos(kx) + i\cos(kx)\sin x + i\sin(kx)\cos x + i^2\sin(kx)\sin x\\
(\cos x + i\sin x)^{k+1} &= (\cos x\cos(kx) - \sin(kx)\sin x) + i(\cos(kx)\sin x + \sin(kx)\cos x)\\
(\cos x + i\sin x)^{k+1} &= \cos(kx + x)) + i\sin(kx + x) && \text{Por identidad de suma de ángulos}\\
(\cos x + i\sin x)^{k+1} &= \cos((k+1)x) + i\sin((k+1)x)
\end{aligned}$$

Se cumple para $P(k+1)$, por lo tanto la proposición es cierta para todo $n \geq 1$

5.2. Deductivo

Consiste en tener una regla general y concluir con ella un caso particular.

Ejemplo: Tenemos aceptado que todo número terminado en cero es divisible por cinco, entonces setenta es divisible por 5.

5.3. Tanteo

Consiste en buscar al azar una conclusión que nos resulte verdadera.

Ejemplo: Supongamos que queremos localizar la residencia de un amigo que vive en determinada manzana residencial que conocemos, para lograrlo, realizamos el siguiente procedimiento:

- Tomamos al azar una residencia de la respectiva manzana y verificamos que no es la vivienda que buscamos, luego tomamos otra y obtenemos la misma conclusión y así sucesivamente, hasta lograr elegir una casa que es donde vive nuestro amigo.
  $x + 7 = 15$
  En la demostración por tanteo se utiliza con frecuencia el método por contra ejemplo, el cuál es muy empleado en matemáticas. Este método consiste en lograr encontrar un ejemplo que contradiga la proposición que estamos afirmando.

5.4. Directo

Consiste en partir de la hipótesis dada junto con las proposiciones ya aceptadas de la teoría respectiva y de ahí llegar a la tesis.

Ejemplo 1:

Demostrar $(r \wedge \neg q) \longrightarrow \neg(\neg r \wedge \neg\neg q)$

1.	$r \wedge \neg q \ldots$	P
$\mathbf{C_1 2.}$	$\neg\neg(r \wedge \neg q) \ldots$	DN_1
C	$\neg(\neg r \wedge \neg\neg q) \ldots$	M_2

Ejemplo 2:

Probar que el cuadrado de un número impar es impar.

Podemos espresarlo así:

$\forall x(\mathbb{Z})$:Sí x es impar, entonces x^2 es impar.

Demostración:

1.	x es impar	hipótesis
2.	Hay un número entero $(\mathbb{Z})\alpha$ tal que $x = 2\alpha + 1$	Definición
3.	$x^2 = (2\alpha + 1)^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 2(2\alpha^2 + 2\alpha) + 1$	Teoremas del álgebra
4.	x^2es impar	Definición

5.5. Por el Absurdo (Contradicción)

consiste en tomar la hipótesis respectiva junto con la negación de la tesis y de ahí llegar a una contradición de la tesis o de alguna proposición ya aceptada de antemano de la teoría respectiva, esto nos hace falsa la negación de la tesis y por consiguiente la tesis es verdadera.

Ejemplo: Si todos los hombres del planeta tierra se comunican por intermedio de la voz articulada y somos hombres del planeta tierra, entonces nos comunicamos por intermedio de la voz articulada.

Para demostrar esta implicación, negamos la tesis y la tomamos junto con la hipótesis respectiva; la hipótesis es:

1. Todos los hombres del planeta tierra se comunican por medio de la voz articulada.

2. Somos hombres del planeta tierra.

   La negación de la tesis es:
   no nos comunicamos por intermedio de la voz articulada.

   De la negación de la tesis y de la hipótesis **1.** se concluye que no somos hombres del planeta tierra, esta afirmación niega la hipótesis **2.** la cual es una proposición aceptada de antemano, luego podemos concluir que es falso que no nos comuniquemos por medio de la voz articulada, lo cual es equivalente por la doble negación a que nos comuniquemos por intermedio de la voz articulada.

3. Proposición: Si n es un entero positivo y n^2 es par, entonces n es par.

   Demostración:

   Su pongamos que n no es par, es decir n es impar, luego $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. luego $(2k + 1)^2 = n^2$, ahora bien, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ y agrupando tenemos $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, luego n^2 es impar, lo que contradice la hipótesis.

4. Demostrar que el conjunto de los número primos es infinito.

   Demostración:

   Supongamos que el conjunto de los números primos es finito y en total hay n número primos. Esto significa que la lista de número primos sería: $P_1, P_2, ..., P_n$.

   Consideremos, el producto de todos los números primos: $Q = P_1 P_2 ... P_n$.
   Ahora, $Q + 1 = P_1 P_2 ... P_n + 1$.

   El número entero $Q + 1$ no es número primo porque no pertenece al conjunto de los número primos, a saber, $P_1, P_2, ..., P_n$. Por lo tanto debe ser divisible por algún número primo, llamémosle P, que lógicamente debe ser uno de los P_i, $i = 1, 2, ..., n$. Pero Q es divisible por P y, claramente, P no puede ser un divisor de $Q+1$, con lo cual llegamos a la contradicción.

   Por lo tanto, la suposición que habíamos hecho al principio de que el conjunto de números primos era finito es falso, por lo que podemos deducir que el conjunto de los números primos es infinito.

5. Demuestre por el método directo los siguientes enunciados

   a) La suma de tres números impares es otro número impar

   b) Si n es un número impar n^2es impar, y n^3 es impar.

   c) El producto de un número par por un impar es siempre par.

6. Demuestre que si m y n son enteros tales que $n + n^2 + n^3 = m + m^2$, entonces n es par.

   Demostración:

Supongamos que n es impar. A partir de esto debemos conseguir una contradicción.

Como n es impar, entonces n^2 y n^3 son ambos impares, de donde $n + n^2 + n^3$ es impar (ya que es la suma de tres impares es impar). Entonces, como $m + m^2 = n + n^2 + n^3$, se tiene que $m + m^2$ es impar.

Sin embargo $m + m^2$ es siempre par (ya que $m + m^2 = m(m + 1)$) y necesariamente alguno de los números m o $m + 1$ es par. Hemos llegado a una contradicción. De allí se tiene que n es par, que es lo que queríamos demostrar.

7. Sean a, b y c enteros impares. Demuestre que no existe ningún número racional x tal que $ax^2 + bx + c = 0$.

   Demostración:

   Supongamos que si existe un número real x tal que $ax^2 + bx + c = 0$. siendo a, b y c enteros impares. Entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJERCICIOS

En los problemas siguientes se dan unas afirmaciones matemáticas, de las cuales unas son verdaderas y otras falsas. Probar las verdaderas, y refutar las falsas.

1. El producto de dos números enteros impares es impar
2. $\exists x : \ 2x + 3 = 4x - 2 - 2x$
3. $\forall x : \ (x + 2)^2 = x + 4$
4. $\forall x : \ x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$
5. Sí $x^2 = 0$, entonces, $x = 0$
6. Sí $x$es divisible por 4, entonces $2x$ es divisible por 8.
7. Demostrar que $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$
8. Si un entero ($\mathbb{Z}$) es múltiplo de 4 es par.
9. Sí $3x + 2 = x + 4$, entonces $x = 1$
10. Si un entero ($\mathbb{Z}$) es múltiplo de 8 es par.
11. Si $8x + 5 = x + 13$, entonces $x = 1$

12. La suma de tres enteros impares es impar
13. El producto de dos enteros impares es impar
14. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2)$
15. $\exists x$ tal que $2^x = 16$
16. La suma de las raíces de $x^2 + 5x + 4 = 0$ es 5.
17. El producto de las raíces de $x^2 - 6x - 16 = 0$ es 16.
18. Si dos triángulos son semejantes tiene la misma área (sugerencia: recuerde que dos triángulos son semejantes cuando tienen los ángulos interiores iguales, más no necesariamente sus lados)
19. Toda ecuación de la forma $ax + b = c$ tiene solución si $a \neq 0$
20. Toda ecuación de la forma $(x-a)(x-b) = 0$ tiene solución si $a \neq b$
21. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 180^o
22. Demostrar que toda ecuación de la forma $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tiene a lo sumo una solución.
23. Demostrar que que toda ecuación de la forma $a + x = b$ tiene a los sumo una solución.
24. Demuestre que la ecuación $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ no tiene soluciones enteras con $x > 0$.
25. Demostrar que dos circunferencia distintas pueden cortarse a lo más en dos puntos. (Sugerencia: tenga en cuenta el siguiente teorema: por tres puntos distintos se puede trazar a los sumo una circunferencia)
26. Demuestre que existen infinitos números primos.
27. $\forall x : (x+2)^3 = x^3 + 8$
28. $\exists x$ tal que $4x + 5 = 2x - 3 + 2x + x$
29. El producto de tres enteros impares es impar.
30. Demostrar: para todos los enteros ($\mathbb{Z}$) $n \geq 1$
$$1 + 2 + +3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
31. Demostrar: para todos los enteros ($\mathbb{Z}$) $n \geq 1$
$$2^n \geq 1 + n$$
32. Demostrar: $n^2 + n$ es divisible por 2

33. Demuestre por inducción los siguientes enunciados para $n \geq 1$

   a) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n^2$
   b) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$
   c) $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n - 3) = \dfrac{n}{2}(5n - 1)$
   d) $2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2$
   e) $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
   f) $2 + 6 + 18 + \cdots + 2.3^{n-1} = 3^n - 1$
   g) $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
   h) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
   j) $a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

34. Hacer uso de la inducción matemática para demostrar la verdad de las siguientes proposiciones para $n \geq 1$

   a) $n^3 + 2n$ es divisible por 3
   b) $n^2 + n$ es divisible por 2
   c) $n^4 + 2n^3 + n^2$ es divisible por 4
   d) $4^n - 1$ es divisible por 3

35. Demuestre por inducción matemática las siguientes inecuaciones.

   a) $5^n \geq 1 + 4n$, para $n \geq 1$
   b) $3^n \geq 1 + 2n$, para $n \geq 1$
   c) $2^n > n^2$, para $n \geq 5$
   d) $4^n > n^4$, para $n \geq 5$

36. Para $n \geq 1$, con $x, y \in \mathbb{Z}^+$ y $x > y$, demuestre que $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$.

37. Para $a, b \in \mathbb{R}$ y los enteros $n \geq 1$, demuestre que $(ab)^n = a^n b^n$

38. Dar una deducción completamente formal de las siguientes conclusiones a partir de las premisas dadas. (Use la ley del silogismo disyuntivo si es el caso)

   a) Demostrar $r \wedge (p \vee q)$ si
      1) $p \vee q$
      2) $q \rightarrow r$
      3) $p \rightarrow t$
      4) $\neg t$
   b) Demostrar t si

1) $p \vee \neg r$
2) $\neg r \to s$
3) $p \to t$
4) $\neg s$

c) Demostrar $\neg q \wedge s$ si

1) $s \wedge \neg r$
2) $r \vee \neg t$
3) $q \to t$

d) Demostrar $\neg t \wedge \neg p$ si

1) $\neg s \vee \neg r$
2) $\neg r \to \neg t$
3) $\neg s \to p$
4) $\neg p$

39. Use la ley del simplificación disyuntiva (si es el caso) para dar una demostración formal de las siguientes conclusiones a partir del conjunto de premisas dados.

a) Demostrar $\neg t \wedge s$ si

1) $p \to \neg q$
2) $p \vee r$
3) $r \to \neg q$
4) $t \to q$
5) s

b) Demostrar q si

1) $q \vee s$
2) $s \to t$
3) $\neg t$

c) Demostrar $\neg s \wedge r$ si

1) $s \to p$
2) $\neg p \wedge \neg t$
3) $\neg t \to r$

CAPÍTULO 6

LÓGICA DE PREDICADOS Y CUANTIFICADORES

Al finalizar está unidad el estudiante estará en condiciones de:

- Hallar el término y el predicado de una forma proposicional.
- Determinar las variables y las constantes de una forma proposicional.
- Establecer equivalencias entre proposiciones completas, utilizando los cuantificadores y simbolizarlas
- Simbolizar una proposición completa a través de proposiciones equivalentes.

A lo largo del estudio de la inferencia lógica o estructura de proposiciones moleculares, pero no se ha analizado la estructura lógica de las proposiciones atómicas. Nos podemos plantear la siguiente cuestión: "Las reglas de inferencia ahora consideradas, ¿permiten hacer todas las inferencias y deducir todas las conclusiones que se pueden pensar como válidas?". No es difícil encontrar ejemplos que contesten a esta cuestión con un "no".

6.1. Término

El término es una expresión que se emplea para nombrar o designar un único objeto o una única persona. El término bien puede ser un nombre propio o un término común

Ejemplo:

- El sol es un astro
  El término es: El sol
- El planeta es un satélite
  El planeta no es un término, puesto que el planeta no determina un único objeto.

6.2. Predicado

El predicado es aquel que nombra una propiedad del término.

Ejemplo:

- 8 es un número par.

El predicado de esta proposición es: 8 es un número par
Los términos los podemos simbolizar con minúscula y los predicados con mayúscula, colocando siempre el predicado primero que el término.

H_x Cuando simbolizamos los términos sin especificar un objeto en particular los símbolos los llamamos variables.
Así una variable es un símbolo que puede ser reemplazado por elementos determinados.
Un término determinado cualesquiera es llamado una constante.

6.3. Cuantificadores

Los cuantificadores nos determinan los valores de las variables para las cuales se falsifica o verifica una forma proposicional.

6.3.1. Cuantificador Universal $(\forall x)$

Este cuantificador establece que cada objeto de nuestro universo tiene cierta propiedad.
el cuantificador universal se expresa: para cualquier, para todo, para cada, cada todo o cualquier sinónimo a estas expresiones.

Ejemplo:

Cualquier cuadrúpedo tiene cuatro patas.

El predicado es: tiene cuatro patas, y lo simbolizamos: D.

El término es: cuadrúpedo, y lo simbolizamos: b, el cuantificador es cualquier

$(\forall p)(D_p)$
$(\forall p) : (P.P)$
$\{\forall p/D_p\}$ Se lee todos los p, tales que p cumple la propiedad D.

6.3.2. Cuantificador Existencial $(\exists)$

Este cuantificador establece que ciertos objetos de nuestro universo tienen determinada propiedad.
El cuantificador existencial se expresa: existe por lo menos un, hay por lo menos un, o cualquier sinónimo a estas expresiones dadas.

Ejemplo :

Existe por lo menos un número entero divisor de 16.

$(\exists y) : (Ny)$, Es decir, existe por lo menos un y, tal que y cumple la propiedad N.

$\{\exists y/Ny\}$ *o* $(\exists y) : (Ny)$

6.3.3. Cuantificador Existencial Particular (∃!)

Este cuantificador establece que un único objeto de nuestro universo tiene determinada propiedad.

Ejemplo :

- Existe un y solo un número par que es primo

  $(\exists!\, w)$:$(H\, w)$, es decir que existe un sólo w, tal que w cumple la propiedad H
  $(\exists!\, w) : (H\, w)$
  $\{\exists!\, w \,/\, H\, w\}$

Equivalencias entre proposiciones completas:

1. $(\forall\, x) : (Mx) \;\cong\; \neg\,(\exists\, x) : (\neg\, Mx)$
2. $(\exists\, a) : (Ba) \;\cong\; \neg\,(\forall\, a) : (\neg\, Ba)$
3. $\neg(\forall\, z) : (E\, z) \;\cong\; (\exists\, a) : (\neg\, E_z)$
4. $\neg(\exists\, d) : (P\, d) \;\cong\; (\forall\, d) : (\neg\, Pd)$

6.4. Cuantificador Universal Afirmativo

Se expresa por todos ... son ...

Ejemplos :

- Todos lo números pares son divisibles por 2.

  para cada x, si x es un número par entonces x es divisible por 2.
  $(\forall\, x) : (Px \;\longrightarrow\; Hx)$

- Todo número terminado en cero es divisible por 10

  $(\forall b) : (Hb)$

- Es falso que existe un número terminado en cero que no sea divisible por 10
  $\neg(\exists b) : (\neg Hb)$

6.5. Cuantificador Universal Negativo

Se expresa, ningún ... es ...

Ejemplo :

- Ningún número primo es divisible por 9.

  Para todo x, si x es un número primo, entonces x no es divisible por 9.
  $(\forall\, x) : (Fx \;\longrightarrow\; \neg\, Gx)$

6.6. Cuantificador Particular Afirmativo

Se expresa, algún ... es, o algunos ... son ...

Ejemplo :

- Algún triángulo es obtusángulo.

  Existe por lo menos un x, tal que x, es triángulo y x, es obtusángulo.
  $(\exists\, x) : (Bx \,\wedge\, Px)$

6.7. Cuantificador Particular Negativo

Se expresa, algún ... no es ...

Ejemplo :

- Algún número par no es divisible por 4.

  Existe por lo menos un x, tal que x es un número par y x no es divisible por 4.
  $(\exists x) : (N_x \wedge \neg M_x)$ ó $\{\exists x / N_x \wedge \neg M_x\}$

EJERCICIOS

1. Identifique los términos singulares, los cuantificadores y todos los posibles predicados en cada uno de los siguientes enunciados

   a) Santiago es arquitecto

   b) Gonzalo es amable

   c) Marco Pérez es profesor en la Universidad de Buenos Aires

   d) 2 es menor que 8

   e) Marta y Andrés son los padres de Fabian y Marilyn.

   f) Algunas estrellas son supernovas

g) Algunos números naturales son impares

2. Hallar una proposición equivalente a cada proposición dada, en frase y en símbolos. Determina su valor de verdad:

   a) Es falso que todo rectángulo sea un cuadrado.
   b) Existe por lo menos un número entero que no es divisor de 8.
   c) Es falso que exista un rectángulo de 5 lados.

3. Simboliza las siguientes proposiciones a través de proposiciones equivalentes.

   a) Algún número impar es divisible por 15.
   b) Ningún número Natural es Irracional
   c) Cada potencia de 10 es divisible por 5.
   d) Algún polígono es cóncavo.

4. Halla una proposición equivalente a cada proposición dada, en frases y en símbolos. Determina su valor de verdad:

   a) Es falso que algunos cuadrados son círculos.
   b) Existe por lo menos un número entero divisor de 5.
   c) Es falso que todo polígono sea un pentágono.
   d) Todo número Entero ($\mathbb{Z}$) es Real ($\mathbb{R}$).

5. Simboliza las siguientes proposiciones a través de proposiciones equivalencias (segunda forma):

   a) Algún número impar es divisible por 15.
   b) Ningún número Natural ($\mathbb{N}$) es Irracional ($\mathbb{I}$).
   c) Cada potencia de 10 es divisible entre 5.

6. Simbolizar usando cuantificadores. (Describa cada predicado)

   a) Todos los pajaros cantores vuelan
   b) Algún pájaro cantor no vuela
   c) Manuel no quiere a nadie
   d) Todo el mundo quiere a alguien, pero nadie quiere a todo el mundo.
   e) Algunas personas votan por sí mismas.
   f) Algunos de los fanáticos de Shakira siguen a Carlos Vives.
   g) Ningún seguidor de Carlos Vives es seguidor de los Tigres del Norte
   h) Hay un suceso importante por descubrir.

i) Por cada punto del espacio de tres dimensiones pasa una recta.

7. Identificar los términos y el predicado de las siguientes frases:

   a) Todo estudiante de Matemáticas tiene una buena formación.

   b) Todo problema tiene una solución.

   c) No todo lo que los ojos ven resulta cierto.

   d) Algunas personas logran vivir más de 100 años.

   e) No todo es color de rosa.

   f) Ninguna ave tiene 5 patas.

   g) A ningún estudiante le gusta tener un promedio menor de 2.9

8. Simbolizar cada uno de las expresiones siguientes con su respectivo cuantificador

   a) Todo alumno de la Universidad del Quindío es buen estudiante

   b) Algunos alumnos de primer semestre son compañeros de María

   c) Ningún alumno de primer semestre tiene problemas

   d) Todo problema tiene solución

   e) No todo lo que los ojos ven resulta cierto

   f) No todo es color de rosa

   g) Todos los tigres tiene madriguera

   h) Todos los tiburones son amables con los niños

   i) Ningún ave tiene 4 patas

   j) A ningún estudiante le gusta tener el promedio menor que 2.9

   k) Para cada entero positivo existe un número entero positivo mayor que el primero

   l) Los enteros positivos tienen un limite inferior

9. Identifique los términos y el predicado de cada uno de los siguientes enunciados

   a) Algunas personas logran vivir más de 10 años

   b) Todo familiar del Pibe Valderrama está orgulloso de él

   c) Si toda persona es normal, entonces es humana

   d) No todos los números primos son pares.

   e) Toda ecuación de segundo grado tiene raíces reales o raíces complejas o una combinación de ambas.

10. Simbolizar cada una de las expresiones siguientes con su respectivo cuantificador, dada la siguiente guia de simbolización.

    UD (universo del discurso) empleados de un circo

Simbolización	Enunciado	Simbolización	Enunciado
$D_{x,y}$	x le debe dinero a y	R_x	x toca el redoblante
$V_{x,y}$	x es más viejo que y	T_x	x es taquillero
D_x	$x$es domador	Y_x	x es un payaso
E_x	x es equilibrista	j	El gran Jursich
M_x	x es mago	u	Ulises lima
O_x	x es director de orquesta		

a) Todos los domadores son más viejos que algún payaso, y algún payaso es más viejo que todos los domadores

b) Ningún domador es mas viejo que alguno de los equilibristas.

c) Cualquier taquillero que le de dinero a un equilibrista es un payaso.

d) Ningún payaso es más viejo que algún director de orquesta, pero algunos domadores si.

e) No todos los payasos son magos, pero todos los magos son payasos.

f) Ninguna persona que toque el redoblante es mago, pero algunos directores de orquesta si.

g) Todos le deben dinero a los payasos que tocan el redoblante, y el gran Jursich le debe dinero a Ulises Lima

h) Ulises Lima le debe dinero a todos los que le deben dinero al gran Jursich.

i) Hay un taquillero que es domador y le debe dinero a todos los payasos.

11. Simbolizar cada una de las expresiones siguientes con su respectivo cuantificador, dada la siguiente guia de simbolización.

UD (universo del discurso) Números enteros positivos

Simbolización	Enunciado	Simbolización	Enunciado
P_x	x es par	$I_{x,y}$	x por y es impar
I_x	x es impar	$R_{x,y}$	x por y es primo
R_x	x es primo	a	1
$M_{x,y}$	x es mayor que y	b	2
$P_{x,y}$	x por y es par		

a) Un número par por un número par, es par

b) El producto de dos números primos es un número primo

c) Si el producto de dos número enteros positivos es par, al menos uno de ellos es par.

d) Si el producto de dos número enteros positivos es impar, los dos son impares

e) Ningún entero positivo multiplicado por 2 es impar.

f) Si un número entero positivo es mayor que otro, y este es mayor que un tercero, el primero es mayor que el tercero.

g) Un número entero positivo es impar si y sólo si no hay ningún número entero positivo que al ser multiplicado por ese número par, de un número impar.

h) Un número entero positivo es impar si y sólo si al multiplicar por un impar el resultado es impar.

12. En los siguientes ejercicios determine el alcance del cuantificador y para cada variable, diga si es libre o ligada.

    a) $(\forall x)(A_x \wedge B_y)$
    b) $(\forall x)(\forall y)(A_x \wedge B_y)$
    c) $(\forall x)(\exists y)(A_x \wedge B_y) \vee C_z$
    d) $(\forall x)(\forall y)(A_x \vee B_x) \rightarrow (\exists z)(C_z)$
    e) $(\forall x)(\exists y)(A_x \wedge B_z) \vee C_x$
    f) $A_x \rightarrow (\exists x)(A_x \rightarrow B_x)$

13. Construya la forma normal prenexa de las siguientes expresiones

    a) $(\exists x)(G_x \rightarrow (\exists z)(M_{z,a}))$
    b) $(\forall w)(S_w \vee (\exists z)(T_z \wedge M_b))$
    c) $\neg(\forall x)(D_{b,x} \vee (\exists y)(D_{b,y}))$
    d) $\neg(\forall x)(D_{b,x} \vee (\exists x)(D_{b,x}))$
    e) $(\forall x)((\forall y)(C_{x,y} \rightarrow (\exists w)(C_{w,x})))$
    f) $(\forall x)(F_x \leftrightarrow (\exists y)(G_y))$
    g) $P_a \rightarrow [(\forall x)(D_x \rightarrow (\exists y)(A_y \vee (\exists z)(P_z)))]$

CAPÍTULO 7

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

7.1. Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos

El concepto que articula los problemas que están en este eje es el de número. Se intenta rastrear en los estudiantes los diferentes sentidos y usos que le asignan al número en diferentes sistemas numéricos; involucrando las operaciones, relaciones, características y propiedades que deben tener en cuenta los estudiantes en una situación determinada.

algunos ejemplos de lo que el eje conceptual de conteo podría indagar sobre la conferencia matemática de los estudiantes, son:

- Usos del número (para medir, como cardinal, como código o símbolo).
- El sentido de las operaciones básicas (adición , sustracción, multiplicación, división) en un sistema numérico en particular (los números racionales).
- El establecimiento de relaciones numéricas (m.c.d, m.c.m, equivalencia, orden, proporcionalidad) en procesos como contar, repartir, agrupar, seriar, generalizar.
- Reconocimiento y uso de conjuntos discretos continuos.
- Propiedades como la densidad en los números reales, en relación con diversas situaciones en las que tenga que hacer uso de ella.

EJEMPLOS:

1. Juliana disminuye el dinero invertido en su canasta familiar un 10 %; pero debido a los buenos negocios de su esposo, decide incrementar el nuevo costo de la canasta familiar en un 10 %. De acuerdo con los ajustes anteriores, lo más lógico que se puede deducir es que:

a) Juliana invierte actualmente lo mismo que pagaba por su canasta familiar, antes de efectuar los ajustes.

b) en la actualidad Juliana invierte más dinero en su canasta familiar del que pagaba antes de efectuar los ajustes

c) hoy Juliana invierte menos dinero en la canasta familiar del que invertía antes de realizar los ajustes

d) En conclusión Juliana disminuyó en un porciento la inversión de la canasta familiar.
R/ si invierte $100, primero se reduce $90 y luego se incrementa a $99, luego realmente disminuyó a un 1 %. Además la opción (d) es más concreta y exacta que la (c)

Un grupo de estudiantes de grado once está negociando un contrato con una famosa agrupación musical, con el objeto de recolectar fondos para su excursión de despedida. La agrupación les cobra $5’000.000 más el 40 % de la recaudación de la taquilla. Los estudiantes planean cobrar $15.000 por boleta personal.

2. Si el día de la fiesta se vendieron 1.200 boletas, se puede afirmar que los estudiantes obtuvieron una ganancia de $5’800.000, porque:

a) dicho dinero corresponde al 60 % del total del recaudo en taquilla.

b) es el saldo de la recaudado en taquilla, menos lo pagado a la agrupación musical

c) equivale al 40 % del recaudo en taquilla, más los $5’000.000 de base

d) equivale al 60 % del recaudo en taquilla, menos los $5’000.000 que cobra como base la agrupación musical.
R/ Las 1.200 boletas a $15.000 c/u son $18’000.000; cuyo 40 % equivale a $7’200.000 luego la ganancia debe ser: $18'000.000 - (7'200.000 + 5'000.000) = 5'800.000$. **finalmente la opción D es más concreta y específica que la de la opción B, donde solamente se hace una afirmación menos clara.**

3. Si los estudiantes quieren una ganancia mínima de $8’500.000, el número de boletas que deben vender es:

a) superior a 1.600

b) mínimo 2000

c) suficiente con 1.500

d) menos de 1.600
R/ Las 1.500 boletas a $15.000 c/u son 22’500.000; cuyo 40 % equivale a $9’000.000. Luego la ganancia debe ser $22’500.000-(9’000.000+5’000.000)=$8’500.00 Además la opción C es concreta y exacta mientras que la opción D es más abierta y no nos da exactamente un valor.

7.2. Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

El pensamiento espacial, entendido como "... el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" 13 contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos.

Desde esta perspectiva se rescatan, de un lado, las relaciones topológicas, en tanto reflexión sistemática de las propiedades de los cuerpos en virtud de su posición y su relación con los demás y, de otro lado, el reconocimiento y ubicación del estudiante en el espacio que lo rodea, en lo que Grecia Gálvez ha llamado el meso-espacio y el macro-espacio, refiriéndose no sólo al tamaño de los espacios en los que se desarrolla la vida del individuo, sino también a su relación con esos espacios14. En este primer momento del pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio.

Posteriormente, y a medida que se complejizan los sistemas de representación del espacio, en un segundo momento se hace necesaria la metrización, pues ya no es suficiente con decir que algo está cerca o lejos de algo, sino que es necesario determinar qué tan cerca o qué tan lejos está. Esto significa un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual hace aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos. De esta manera, la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana. Lo anterior implica relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial.

Así pues, la apropiación por parte de los estudiantes del espacio físico y geométrico requiere del estudio de distintas relaciones espaciales de los cuerpos sólidos y huecos entre sí y con respecto a los mismos estudiantes; de cada cuerpo sólido o hueco con sus formas y con sus caras, bordes y vértices; de las superficies, regiones y figuras planas con sus fronteras, lados y vértices, en donde se destacan los procesos de localización en relación con sistemas de referencia, y del estudio de lo que cambia o se mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones. El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras. Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio. El trabajo con la geometría activa puede complementarse con distintos programas de computación que permiten representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional.

Ejemplo:

1. Se tiene un rectángulo y un cuadrado

   - El largo del rectángulo es 20 % mayor que el lado del cuadrado
   - El ancho del rectángulo es 20 % menor que el lado del cuadrado.
     El profesor Carlos pide a sus estudiantes hallar el área del rectángulo con respecto al área del cuadrado. ¿Quién dice la verdad?

   a) Diego sostiene que es imposible hallar la relación, pues no conocemos las dimensiones de ninguna de las dos figuras.

   b) María Paula asegura que Diego está equivocado, pues si suponemos que el cuadrado es de 5×5 unidades, se puede concluir que el área del rectángulo es 4 % menor que la del cuadrado

   c) Felipe concluye que como las dimensiones del rectángulo aumentan y disminuyen un 20 %, su área debe ser igual a la del cuadrado

   d) Daniela sugiere que si el lado del cuadrado es x, el área del rectángulo es $(1,2x)(0,8x)$. Al compararla con el área del cuadrado se concluye que la del rectángulo es 4 % menor que la del cuadrado.
   R\ la respuesta es d, es más elaborada y concreta que la c.

7.3. Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas

En este eje confluyen varios conceptos articuladores; ellos son: medida, métrica (parámetros adecuados para realizar medidas), y espacio. Se busca rastrear en los estudiantes los diversos sentidos y usos que den a las relaciones (equivalencias, proporcionalidad) que surgen cuando se consideran medidas asociadas a formas geométricas, sus movimientos, condiciones invariantes de las formas, propiedades y operaciones que les sean propias.

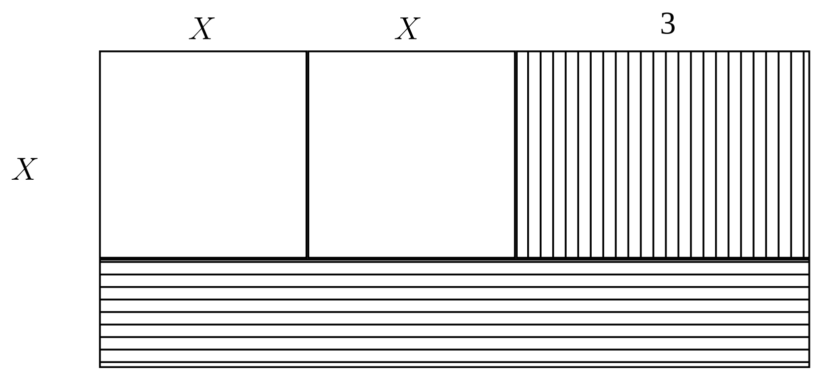
Algunos ejemplos de lo que el eje conceptual de medición podría indagar sobre la competencia matemática de los estudiantes, son:

- Manejo de espacio, conservación y reorganización de áreas o perímetros.

- Establecimiento de relaciones como proporcionalidad o semejanza (entre medidas, entre figuras).
- Propiedades de ciertas figuras geométricas (planas, sólidos).
- Uso y establecimiento de patrones de medida no convencionales.
- Reconocimiento y estimación de magnitudes (métrica usual) en diversas situaciones problemas.
- Reconocimiento y uso de características invariables en movimientos en el plano (reflexiones, translaciones, rotaciones).

EJEMPLOS:

1. El profesor Edgar le asegura a sus estudiantes que el área total de la siguiente figura es $66cm^2$ y le pide métodos para encontrar el valor de x. ¿Quién tendrá la razón?



   a) Felipe dice que es imposible calcular el valor de x porque faltan datos

   b) Valentina propone resolver la ecuación $(2x+3)(x+2)=66$ y de ahí despejar el valor de la x; toda vez que la figura es un rectángulo el área es el producto de la base por la altura

   c) Diego sugiere darle valores enteros a la x sobre la figura, basado en que el área es el producto de la base por la altura, hasta obtener el valor 66

   d) Maria Paula dice que la forma más práctica es mediante métodos gráficos y por medición

   R/ La respuesta del literal (b) nos ofrece una solución algebraica que resulta más estructurada que darle valores a la x, como lo hace el literal (c)

2. Daniela marca 3 puntos A, B y C en línea recta quedando B entre A y C. Si n es un número tal que: $AB = 2n+2$ y además $AC = 6n+8$; entonces respecto al valor de BC , se puede decir que:

   a) es mayor que el valor de AB

b) equivalente al doble de AB

c) es menor que al valor de AB

d) equivalente a $4n + 6$
R/ $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = (6n + 8) - (2n + 2) = 4n + 6$. **Por lo tanto el literal D nos ofrece una cantidad concreta, mientras que el A solamente nos ofrece una particularidad**

7.4. El Pensamiento Aleatorio y los Sistemas de Datos

En este eje se intenta rastrear en los estudiantes la interpretación y el uso de datos estadísticos, sus descripciones a partir de las medidas de tendencia central y representaciones gráficas; el establecimiento de arreglos y combinaciones a partir de condiciones dadas; la determinación y el análisis de posibilidades de ocurrencia y un evento bajo determinadas circunstancias.

Algunos ejemplos de lo que el eje conceptual de aleatoriedad podría indagar sobre la competencia matemática de los estudiantes son:

- Interpretación de distintos gráficos (circulares, de barras, histogramas).
- Determinación y uso de promedio, mediana y moda.
- Reconocimiento de frecuencias relativas y absolutas.
- Traducción a porcentajes y ponderaciones.
- Establecimiento de conjeturas a partir de arreglos o combinaciones.
- Toma de decisiones a partir del cálculo de probabilidades y su significado.

EJEMPLOS:

1. El dado que vamos a utilizar es perfecto. Diego y Valentina juegan lanzándolo y el ganador será el de mayor puntaje al sumar los puntos al finalizar el juego. Cada uno debe lanzar el dado 5 veces y los primero 4 resultados serán anotados en la siguiente tabla.

Lanzamiento	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0
Diego	3	4	6	5	
Valentina	5	3	2	2	

Respecto al efecto del quinto lanzamiento podemos decir:

a) define el ganador del juego

b) la posibilidad de Valentina para igualar el juego es mínima

c) Diego y Valentina tienen la misma posibilidad de obtener el número mayor en el quinto lanzamiento

d) no hay necesidad de realizarlo porque Diego ganó el juego en los primeros 4 lanzamientos

R/ Aunque Diego y Valentina tengan la misma posibilidad de obtener el número mayor es más concreto y concluyente observar que Diego ya había ganado el juego; pues como llevaba 18, al sacar sólo 1 en el quinto lanzamiento completaría 19; mientras que Valentina lleva 12 y así obtenga 6, máximo sumará 18 en total.

En una empresa de diseño gráfico se tiene una vacante para auxiliar de diseño gráfico; y los posibles sueldos para el cargo, están planteados en dos planes salariales:
PLAN A: empezar con $8'000.000 el primer año y aumentar $400.000 anuales sobre el sueldo anterior.
PLAN B: empezar con $4'000.000 el primer semestre y aumentar $100.000 sobre el sueldo anterior al terminar cada semestre.

2. Hay seis personas para tomar la vacante de auxiliar de diseño gráfico y se realiza un sorteo para asignar los planes. El sorteo consiste en que cada uno debe sacar una balota de una bolsa que contiene 10 balotas enumeradas del 0 al 9. Las balotas del 0 al 4 otorgan el cargo del plan A y las balotas del 5 al 9 otorgan el cargo del plan B. Cada vez que se saque una balota, el número que se obtenga saldrá del sorteo. Si al turno del tercer opcionado ya se han sacado las balotas 2 y 3, la probabilidad de quedar en el cargo con el plan B es del 100 %.

a) no, porque para que sea del 100 % sin importar que balota saque, deberían quedar balotas únicamente del 5 al 9.

b) si, porque sin importar la balota que saque, quedará con el sueldo

c) no, porque la probabilidad que tiene es de $\frac{5}{8}$

d) no, porque el primer opcionado tuvo 0,8 de probabilidad de obtener el cargo.
R/ El literal A nos argumenta una solución general, mientras que el literal C sólo nos muestra una particularidad.

7.5. Pensamiento variacional y Sistemas Algebraicos y Analítico

En este eje se incluye el concepto de variable como articulador de los problemas que se plantean. Desde este concepto, es posible indagar por las diferentes significaciones sobre "lo que cambia" en una situación determinada; el reconocimiento de diversos elementos asociados a situaciones de variación, como reglas de transformación universos numéricos (P.e., conjuntos numéricos de referencia); reconocimiento y uso de regularidades, patrones; sentido y uso de las relaciones que posibilitan desde estas situaciones, como ecuaciones, inecuaciones, funciones, sentido, significado y uso de distintas formas de representación en situaciones de variación.

Algunos ejemplos de lo que el eje conceptual de variación podría indagar sobre la competencia matemática de los estudiantes, son:

- Noción y significado de variable (como letra, número generalizado, variable).
- Reconocimiento y uso de secuencias, sucesiones, series.
- Análisis de las relaciones de dependencia entre variables (continuas, discretas).
- Significado y análisis de gráficas (pendiente, dominio, codominio) de diferentes funciones (trigonométricas, lineales, cuadráticas, especiales).
- Manejo y uso de la constante y la variable en situaciones donde se requieren traducciones de lenguaje (gráfico, tabular, icónico, natural, simbólico).
- Reconocimiento de regularidades y patrones en secuencias geométricas y numéricas.

EJEMPLOS:

1. Las $\frac{3}{4}$ partes de la edad de Fabio son 18 años y la edad de Andrea son las $\frac{5}{6}$ partes de la edad de Fabio. ¿Será posible determinar la edad de la pareja?

   a) si, porque si 3 de las 4 partes son 18 años, necesariamente Fabio debe tener 24 años y si la edad de Andrea son 5 partes de las 6 que tiene Fabio, es porque Andrea tiene 20 años.

   b) no, porque la información que nos presenta la situación es incompleta.

   c) si, porque de $\frac{3}{4}x = 18$ deducimos la edad de Fabio, y reemplazando x en $\frac{5}{6}x = y$, se deduce la edad de Andrea

   d) no, porque las dos informaciones que nos dan no concuerdan
   R/ La respuesta es la (c), porque es más compleja y estructurada que la (a), pues en ésta última la solución se halla mediante simples cálculos mentales.

   A Yasmín le corresponde en el "Grupo Educativo", vender el material didáctico y cobrar una cuota fija de afiliación a todo estudiante que desee este plan. Yasmín debe tener en cuenta que a cada estudiante, cuando compre un artículo (libro o dominó), se le debe hacer el descuento del 15 % sobre el valor del artículo y se le adiciona un 10 % por concepto de impuesto al valor agregado (IVA), y además tener en cuenta cada socio sólo puede comprar un artículo mensualmente. Yasmín, con el fin de volver más funcional su labor de vender y cobrar, decide relacionar los datos anteriores en la siguiente función.

$$F(x) = x - \frac{3}{20}x + \frac{1}{10}x + c$$

2. De la función se puede deducir que un socio que no compra ningún material didáctico, no paga nada. Esta afirmación es:

    a) falsa, porque al asignar a la variable el valor cero debido a que este socio no compra ningún artículo, si debe pagar como mínimo la cuota inicial

    b) falsa, porque la cuota de afiliación en la función es independiente del valor del artículo y por lo tanto del impuesto y del descuento

    c) verdadera, porque al asignar a la variable el valor cero, el resultado obtenido es cero.

    d) verdadera, porque en la formula hay un valor definido para cada precio de cada artículo, y en este caso el valor del artículo es cero.

EJERCICIOS

Responda las preguntas 1 a 3 de acuerdo con la siguiente información.

María Alejandra observa en el microscopio la forma como se multiplican los microbios en una fruta en descomposición y elabora la siguiente tabla:

Tiempo (segundos)	2	3	4	5	6	7
Microbios(unidades)	3	8	15	24	35	48

1. Para que existan 400 microbios, el tiempo empleado debe ser:

    a) Más de 25 segundos

    b) Menos de 22 segundos

    c) Aproximadamente 20 segundos

    d) Aproximadamente 18 segundos

2. De acuerdo con los datos de la tabla, se puede concluir que:

    a) Al variar el tiempo, varía el número de microbios reproducidos

    b) Hay una relación directamente proporcional entre el tiempo y los microbios reproducidos

    c) Cada 2 segundos, el número de microbios reproducidos cambia

    d) Hay una relación creciente entre el tiempo y los microbios reproducidos.

3. Podemos deducir que se han reproducido menos de 100 microbios, cuando han transcurrido 10 segundos, porque:

    a) Por cada segundo aumentan 5 microbios

    b) Los microbios reproducidos dependen del tiempo empleado, elevado al cuadrado, menos un microbio

    c) La diferencia entre los microbios en la tabla está representada por la progresión aritmética 5, 7, 9, 11, 13...

    d) En 5 segundos de deben reproducir la mitad, o sea 50 microbios.

Responda las preguntas de 4 a 8 de acuerdo con la siguiente información.

El Grupo Educativo Hélmer Pardo tiene una fotocopiadora tipo A para prestarle el servicio a sus alumnos y establece la siguiente tarifa:

Cantidad	Precio por fotocopia en pesos
1 a 10	100
11 a 50	80
51 a 100	60
más de 100	50

4. Para determinar el valor que se debe pagar por 60 fotocopias, lo más correcto es:

   a) Calcular lo que cuestan 100 fotocopias y restar lo que cuestan 40 fotocopias

   b) Situar el intervalo de costo y que necesariamente debe estar entre \$3.060 y \$6.000 y por regla de tres hallar el costo de las 60 fotocopias

   c) Solamente basta con multiplicar 60 por 60.

   d) Hallar el valor de 30 fotocopias y multiplicar por 2 ese valor.

5. Patricia debe llevar a la universidad un buen número de fotocopias de un mismo original, pero solamente tiene \$3.800. ¿Cuántas fotocopias podrá sacar y qué cambio deberá recibir?

   a) 63 fotocopias y le sobran \$20

   b) 76 fotocopias y no le sobra nada

   c) Más de 60 fotocopias y le sobran más de \$10

   d) Más de 75 fotocopias y no le sobra nada.

6. Yasmín necesita 50 fotocopias de un original; pero al leer la lista de precios, decide comprar 51 fotocopias. Para determinar el ahorro que ha hecho Yasmín debe:

   a) Calcular el valor de 50 fotocopias a \$80 cada una y restarle el valor de 50 fotocopias a \$60 cada una. Finalmente sumarle \$60.

   b) Calcular el valor de 50 fotocopias a \$80 cada una y restarle el valor de 51 fotocopias a \$60 cada una.

   c) Calcular el valor de 50 fotocopias a \$80 cada una y restarle el valor de 50 fotocopias a \$60 cada una. Finalmente a este valor restarle \$60

   d) Averiguar lo que cuestan 50 fotocopias a \$80 cada una, sumarle lo que cuestan 50 fotocopias a \$60 cada una y este resultado dividirlo por 2.

7. En el transcurso del día Fabio Andrés ordenó fotocopias 3 veces, haciendo un gasto total de \$12.000. El número de fotocopias que ordenó en cada una de sus visitas, fue:

   a) La primera vez 125, la segunda 65 y la tercera 15.

   b) Siempre ordenó un número multiplo de 5 y cada vez ordenó una cantidad menor de fotocopias.

   c) La primera vez 30, la segunda 60 y la tercera 120

   d) Siempre ordenó múltiplos de 10 y en total mandó sacar 210 fotocopias

8. Al final del día el Grupo Educativo desea determinar la cantidad de hojas de papel gastadas, conociendo la cantidad de dinero recogido durante el día. Esto es:

a) Imposible hacerlo, por que la información es incompleta.

b) posible hacerlo si se conoce que se sacaron el doble de fotocopias de \$100 que de \$80 y el doble de fotocopias de \$60 que de \$50

c) posible conocerlo si se sabe el número total de fotocopias sacadas de \$60 y \$100 respectivamente.

d) imposible conocerlo, porque desconocemos el número de fotocopias sacadas de cada uno de los costos establecidos por la tabla.

Responda las preguntas 9 a 13 de acuerdo con la siguiente información.

Mauricio resuelve montar una empresa para comercializar maní con uvas pasas y para lograrlo realiza distintos estudios de factibilidad, tanto para efectuar las mezclas como para pactar una buena publicidad. Después de una seria investigación de mercados, encontró que la mejor opción era mezclar las uvas pasas y el maní en razón de 3 a 5 respectivamente.

9. Si desea comercializar bolsas de 120 gramos, ¿cuántos gramos de uvas pasas debe contener cada bolsa?

a) 40 gramos, resultado de resolver la regla de tres $\frac{120}{x} = \frac{6}{2}$

b) 40 gramos, toda vez que 40 veces 3 nos da 120 gramos

c) 45 gramos, que resulta de multiplicar por tres el cociente de 120 dividido por 8, que es la suma de la relación de 3 a 5

d) 45 gramos, que se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones $\frac{X}{Y} = \frac{3}{5}$ con $X + Y = 120$, de donde hallamos el valor de X

10. Mauricio está considerando la posibilidad de publicitar su maní con pasas por televisión. Los resultados de una de las encuestas revelaron que en promedio hay 3,2 personas por hogar y 1,2 televisores por hogar. Si en el barrio de Mauricio viven 48.000 personas, ¿cuántos televisores hay?

a) 18.000 televisores exactamente

b) más de 30.000 televisores

c) 36.000 televisores exactamente

d) menos de 30.000 televisores

11. Después de un mes de producción, Mauricio evalúa la calidad de su maní con pasas y resultan en una relación de 3 a 1 los paquetes buenos con respecto a los defectuosos. Para demostrar a sus empleados la forma de mejorar la calidad de producción, produce 6 toneladas sin defectos. Esto eleva la razón de 5 a 1 ¿cuántas toneladas de paquetes buenos se produjeron antes de la demostración de Mauricio?

a) 9, toda vez que al sumarle 6 y dividirlo por 3, obtenemos la razón de 5 a 1.

b) 15, porque este es el resultado de resolver la igualdad $\frac{X}{\frac{6}{2}} = \frac{5}{1}$

c) 9, toda vez que es el resultado de resolver la igualdad $\frac{X+6}{Y} = \frac{5}{1}$ donde $X = 3Y$, para calcular el valor de X

d) 15, por que al incrementar en 6 la producción, la razón aumenta en 2, por lo que cada unidad equivale a 3 y dado que la razón era de 5 a 1, deducimos que las toneladas de paquetes eran buenos son 15.

12. Uno de los asesores de Mauricio le sugiere vender una presentación de solo maní, y en consecuencia en un día de prueba se venden 40 bolsas de maní con pasas por \$48.0000, como parte total de las ventas combinadas que fue de \$60.000; si el maní con pasas, es tres veces el precio de la bolsa con solo maní. ¿Cuántas bolsas de maní se vendieron?

    a) más de 25 bolsas
    b) 30 bolsas exactamente
    c) menos de 28 bolsas
    d) 24 bolsas exactamente

13. El promedio X, Y y 80 es 6 unidades mayor que el promedio de Y, Z y 80. El valor de $X - Z$ es un número

    a) mayor que 6
    b) menor que 6
    c) 6 exactamente
    d) no se puede determinar.

Responda las preguntas 14 y 15 de acuerdo a la siguiente información.

Rafael una vez construida la casa de sus sueños resuelve pintarla y encuentra que la pintura que se requiere es directamente proporcional a la superficie de las paredes que se desean pintar.

Por cada 36 m^2 se necesita $\frac{3}{4}$ de galón de pintura.

14. Teniendo en cuenta que para pintar una pared de 36 m^2 se necesita de $\frac{3}{4}$ de galón de pintura; para pintar una pared de $8m \times 6m$, necesita:

    a) mayor cantidad de pintura, porque la superficie es mayor
    b) exactamente un galón de pintura, porque es la proporción entre el área de la superficie de las paredes y la cantidad de pintura
    c) exactamente $\frac{5}{4}$ de galón de pintura, porque es la proporción entre el área de la superficie de las paredes y la cantidad de pintura
    d) menos cantidad de pintura, porque la superficie es menor

15. Con la información dada en la situación es posible predecir la cantidad de pintura necesaria para pintar cualquier pared, porque:

    a) podemos asociar área con cantidad de pintura
    b) podemos establecer que para pintar una pared de $12m \times 5m$, en su totalidad, y sin que sobre pintura, necesito de $\frac{5}{4}$ de galón de pintura
    c) podemos establecer la relación de que por cada galón de pintura, hay $48m^2$ de superficie
    d) podemos encontrar la cantidad de pintura, sabiendo que para una superficie mayor, se necesita mayor cantidad de pintura.

Responda las preguntas 16 a 20 de acuerdo a la siguiente información.

En la secretaría de circulación y tránsito se establecieron las siguientes tarifas para el servicio de taxis en Bucaramanga

Tarifas Básicas	
Recargo al aeropuerto Palogrande	\$1500 =
Servicio puerta a puerta	\$600 =
Carrera mínima a cobrar sin importar el trayecto	\$1500 =
Recargo nocturno o festivo	\$300 =
Banderazo ó tarifa inicial	\$600 =

Para registrar el recorrido y poder establecer el valor a pagar se usa un taxímetro. Al encenderse marca la tarifa inicial de \$600. El taxímetro irá aumentando su valor en \$100 cada 100 metros o cada 30 segundos, cuando el vehículo esté detenido. La palabra banderazo de la tabla se refiere cuando un pasajero detiene el taxi para abordarlo.

16. Diego solicita el servicio de taxi, para que lo lleve des de su casa hasta el aeropuerto un lunes a las 9:00 a.m. Si la distancia recorrida de la casa al aeropuerto es de 5 Km, se puede afirmar que:

    a) el valor de la carrera es de \$7.500 de recorrido y \$2.100 de recargo
    b) el valor de la carrera es de \$5.000 de recorrido, \$600 de servicio puerta a puerta, \$1.500 de recargo por ser una carrera al aeropuerto y \$600 de tarifa inicial
    c) el valor de la carrera es de \$10.000. Por concepto de recorrido, más \$600 de servicio puerta a puerta y \$1.500 de recargo por ser una carrera al aeropuerto
    d) el valor de la carrera será mayor o igual a \$7.700

17. Si en una carrera el valor marcado en el taxímetro excede el valor máximo estipulado de \$99.900, una manera de calcular el valor de una carrera que supere dicha cantidad es:

    a) multiplicando el valor máximo del taxímetro por el número de kilómetros recorridos
    b) adicionando \$100 por cada 100 metros después del último valor que alcanzó a registrar el taxímetro
    c) duplicando el valor máximo en pesos alcanzando el taxímetro
    d) realizando la diferencia entre el total de kilómetros recorridos y el máximo número de kilómetros marcado en el taxímetro. A esta diferencia en kilómetros le hallamos el valor equivalente en pesos registrado en el taxímetro y le sumamos el valor máximo registrado en pesos en el taxímetro.

18. Valentina solicita un domingo un servicio de taxi para que realice una carrera al aeropuerto. Después de realizar el recorrido, el taxista cobra por el servicio \$8.400. Es posible que el valor de esta carrera haya correspondido a:

    a) los \$600 por el servicio de puerta a puerta, \$600 de banderazo, \$1.500 por ser una carrera al aeropuerto, \$300 de dominical y \$5.400 de recorrido
    b) las tarifas básicas \$2.700, el recorrido \$5.400 y \$200 correspondientes al tiempo que estuvo detenido el vehículo
    c) el concepto de servicio puerta a puerta, recargo al aeropuerto, el recorrido y los tres minutos que el vehículo estuvo detenido.

d) los \$3.000 de tarifas básicas (servicio puerta a puerta, carrera al aeropuerto, dominical y banderazo) y de \$5.300 a \$5.500 correspondientes al recorrido hecho por el taxi.

19. Si Rafael paga por una carrera nocturna \$4.500, entonces es correcto afirmar que:

    a) la distancia recorrida fue de 3,6 kilómetros exactamente

    b) terminado el recorrido el taxímetro marco \$4.200 y no existió tiempo de espera, ni servicio puerta a puerta y el servicio no fue al aeropuerto.

    c) el cobro de la carrera se hizo porque el taxi recorrió entre 4.500 y 500 metros

    d) el cobro fue por concepto de \$600 de banderazo, \$300 de recargo, 3,2 kilómetros de recorrido y \$900 por espera de tiempo.

20. Para calcular la distancia que recorrió un taxi en una carrera, se debe saber:

    a) el valor total de la carrera, más de los recargos

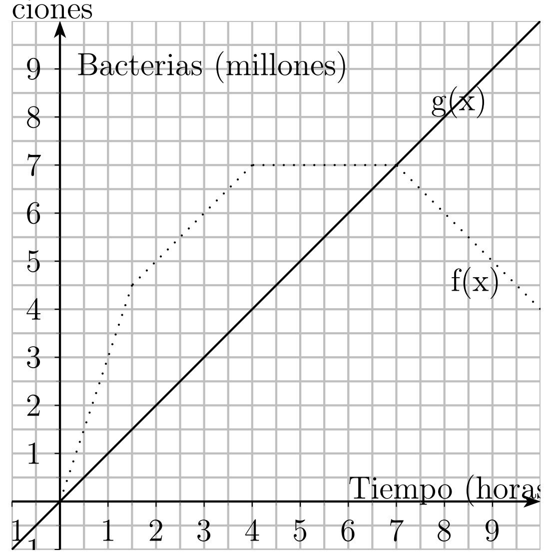
    b) el tiempo que permaneció detenido y el total marcado por el taxímetro

    c) el valor de la carrera, los recargos y el tiempo que permaneció detenido

    d) las tarifas básicas cobradas en el recorrido y el total que marcó el taxímetro

Responda las preguntas 21 a 26 de acuerdo a la siguiente información.

las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, nos pueden representar diferentes situaciones



21. Si $f(x)$ nos representa el crecimiento (en millones) de la población de bacterias A y $g(x)$ el crecimiento (en millones) de la población de bacterias B durante 10 horas; entonces podemos inferir que

    a) en ninguna hora la población de bacterias B es igual a la población de bacterias A

    b) la diferencia entre la población de bacterias A y la población de bacterias B en la tercera hora es superior a 2.000.000

    c) en ninguna hora la población de bacterias B supera la población de bacterias A

    d) la diferencia entre la población de bacterias A y la población de bacterias B en la tercera hora es inferior a 2.000.000

22. de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, es posible afirmar que

    a) son crecientes en todo su dominio

    b) son decrecientes en todo su dominio *c*) es menor $f(x)$ que $g(x)$ en el intervalo $[7, 10]$

d) es mayor $f(x)$ que $g(x)$ en el intervalo $[7, 10]$

23. Recordando que la integral de una función sobre un intervalo $[a, b]$ representa el área bajo la curva en dicho intervalo, respecto a la función $f(x)$, podemos afirmar que

a) $\int_1^3 f(x)dx < \int_4^6 f(x)dx$

b) $\int_1^3 f(x)dx > \int_4^6 f(x)dx$

c) $\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_4^6 f(x)dx$

d) $\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{3}\int_4^6 f(x)dx$

24. Para que el área determinada por $f(x)$y el eje x, se asume en 10 unidades, es necesario

a) rotar 360^0 la función $f(x)$

b) trasladar $+1$ unidad horizontalmente la función $f(x)$

c) rotar 90^0la función $f(x)$

d) trasladar $+1$ unidad verticalmente la función $f(x)$

25. Respecto a la función $g(x)$, podemos afirmar que

a) $\int_7^{10} g(x)dx < \int_{3,5}^7 g(x)dx$

b) $\int_7^{10} g(x)dx = \int_{2,5}^{5,5} g(x)dx$

c) $\int_7^{10} g(x)dx > \int_{3,5}^7 g(x)dx$

d) $2\int_7^{10} g(x)dx < \int_0^7 g(x)dx$

26. Si Adrián Felipe afirma que $\int_0^{10} g(x)dx = \int_0^4 g(x)dx + \int_4^{10} g(x)dx$ podemos considerar que la afirmación es

a) incorrecta, porque la suma de las integrales de la derecha de la igualdad es mayor que la integral de la parte izquierda

b) correcta, porque las integrales de la derecha de la igualdad es mayor que la integral de la parte izquierda

c) incorrecta, porque la suma de las integrales de la derecha de la igualdad es menor que la integral de la parte izquierda

d) correcta, porque la suma de las partes solamente es posible para funciones lineales

27. El profesor Carlos le manifiesta a sus alumnos que mediante un informe que su colega de educación física encontró que el 40 % de sus alumnos juegan fútbol, el 20 % baloncesto y un 25 % de los restantes practican atletismo.
¿Qué porcentaje de los estudiantes juegan un deporte distinto a los anteriores, sabiendo que ningún estudiante práctica 2 deportes?

a) Fabio asegura que es el 15 % exactamente

b) Andrea contradice a Fabio, porque está convencida que son más del 20 %

c) Rafael no está de acuerdo con Andrea, pues él calculó que son menos del 20 %

d) Laura sugiere que mediante un buen análisis de lectura, se obtiene que son el 30 % exactamente

28. Finalmente el profesor Carlos les plantea a sus estudiantes que si uno de ellos compró 9 manuales para prepararse para las Prueba de Estado y el manual de física le costó 3 veces el costo promedio de los otros 8 manuales, ¿qué fracción del total pagado por los 9 manuales, será el costo del manual de física?

a) Daniela dice que $\frac{3}{11}$, ya que es lo mismo que si comprámos 11 manuales al costo promedio, pues el de física cubriría el costo de 3 de ellos

b) Jorge asegura que $\frac{3}{4}$, toda vez que al ser 3 veces el costo de los demás, los costos estarían en razón de 3 a 1, que es equivalente a los $\frac{3}{4}$ del total.

c) Alexandra respalda lo propuesto por Daniela, porque si asociamos que el costo promedio de los otros 8 manuales es de \$10.000, el de física sería de \$30.000, y el total gastado sería \$110.000, con lo cual la fracción sería inmediata

d) Javier está de acuerdo con Jorge, pues si suponemos que el costo de los otros 8 manuales es de \$30.000, entonces el costo del manual de física sería \$90.000, para un total de \$120.000, que es de donde obtenemos la fracción de $\frac{3}{4}$

BIBLIOGRAFÍA

[1] GARCIA, J. *Diseño gráfico en LaTeX* , 2007.

[2] LINEAMIENTOS CURRICULARES MATEMÁTICAS. Ministerio de Educación Nacional. Santa fe de Bogotá: Julio de 1998.\

[3] ARANA, J. Introducción a la lógica Matemática

[4] MEN. Matemáticas Lineamientos Curriculares. Editorial Magisterio.

[5] CONSUEGRA J. C. y VASQUEZ F. Guía Práctica para la redacción de ensayos.

[6] PARDO, E. Problemas de Aplicación tipo ICFES. Competencias interpretativas, argumentativas y propositiva.

[7] SUPPES, P y HILL, S. Introducción a la Lógica Matemática. Editorial Reverté, Barcelona, 1968.

[8] GRASSMAN, W y TREMBLAY, J. Matemática discreta y lógica. Editorial Prentice Hall, Madrid España, 1996.

[9] PÁEZ, A. Introducción a la lógica moderna. Ediciones Uniandes, Santafé de Bogotá, Colombia, 2007.

[10] OBESO, V y BURGOS, H. Lógica matemática, Ediciones Uninorte, Barranquilla, Colombia, 2007.