TEORÍA DE LA DECISIÓN:

Decisión con Incertidumbre, Decisión Multicriterio y Teoría de Juegos

Begoña Vitoriano
bvitoriano@mat.ucm.es

Julio 2007

ÍNDICE

I.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA DECISIÓN 3
I.2 TEORÍA DE LA DECISIÓN CON INCERTIDUMBRE O RIESGO 5
I.2.1 Criterios para valorar las posibles decisiones 6
I.2.2 Valor esperado de la información perfecta (VEIP) 9
I.2.3 Procesos decisión polietápicos: Árboles de decisión 10
I.2.4 Utilidad: concepto y funciones de utilidad 14
I.3 DECISIÓN MULTICRITERIO 19
I.3.1 Introducción: conceptos básicos 19
I.3.2 Métodos de optimización multiobjetivo 21
I.3.2.1 Técnicas generadoras del conjunto eficiente 23
I.3.2.2 Programación compromiso 24
I.3.3 Métodos satisfacientes: programación por metas 25
I.3.3.1 Variantes de la programación por metas 26
I.3.3.2 Temas críticos en programación por metas 27
I.3.4 Métodos de decisión multicriterio discretos 32
I.3.4.1 Procesos analíticos jerarquizados (método AHP) 32
I.3.4.2 Método Electre 34
I.4 TEORÍA DE JUEGOS O JUEGOS DE ESTRATEGIA 41
I.4.1 Clasificación de los juegos 42
I.4.2 Juegos no cooperativos, con información completa y estáticos 44
I.4.2.1 Concepto de solución 44
I.4.2.2 Un caso particular: Juegos de suma constante o juegos matriciales 49
I.4.2.2.1 Las estrategias mixtas en un juego de suma nula 51
I.4.2.3 Aplicaciones de juegos no cooperativos, con información completa y estáticos 54
I.4.2.3.1 Modelo de duopolio de Cournot (1838) 54
I.4.2.3.2 Modelo de duopolio de Bertrand (1883) 55
I.4.2.3.3 Arbitraje de oferta final. Modelo de Farber (1980) 56
I.4.2.3.4 Los ejidos 57
I.4.3 Juegos no cooperativos, con información completa y dinámicos 58
I.4.3.1 Concepto de solución: equilibrio de Nash perfecto en subjuegos 61
I.4.3.2 Cálculo de la solución con información perfecta y finitas etapas: inducción hacia atrás. 62
I.4.3.3 Aplicaciones con información perfecta 63
I.4.3.3.1 Modelo de duopolio de Stackelberg (1934) 63
I.4.3.3.2 Negociación secuencial en 2 periodos 65
I.4.3.3.3 Negociación secuencial en infinitos periodos 65
I.4.3.4 Juegos con información imperfecta: decisiones simultáneas en una etapa 66
I.4.3.5 Aplicaciones con información imperfecta 66
I.4.3.5.1 Pánico bancario 66
I.4.3.5.2 Aranceles y competencia internacional imperfecta 67
I.4.3.5.3 Juegos repetidos en T etapas 69
I.4.3.5.4 Juegos repetidos en infinitas etapas: colusión entre duopolistas de Cournot 71
I.4.4 Juegos no cooperativos con información incompleta o juegos bayesianos 73
I.4.5 Juegos cooperativos: las coaliciones 77
I.4.5.1 Caracterización de un juego n-personal: la función característica. 78

I.4.5.2 Una caracterización de las soluciones: las imputaciones 79
I.4.5.3 Un concepto de solución de un juego: El núcleo 80
I.4.5.4 Un concepto de solución de un juego: El valor Shapley 81
I.5 Referencias 85
I.6 Biblioteca de problemas 87
I.7 Resultados de la biblioteca de problemas 101

I.1 Introducción a la teoría de la decisión

En la vida real, y tanto en el ámbito profesional como el personal, nos vemos enfrentados a multitud de situaciones en las que tenemos que decidir entre varias alternativas. La propia optimización no es más que una forma de tomar una decisión entre unas alternativas factibles.

Así, en su dimensión más básica, un proceso de toma de decisión puede entenderse como la elección de lo "mejor" entre lo "posible". Ahora bien, según se defina qué es lo mejor y qué es lo posible nos enfrentaremos a distintas situaciones de decisión.

La optimización clásica tiene como característica general que lo mejor, el objetivo, es único y está claramente determinado (excepto en optimización multiobjetivo) y que lo posible, las soluciones factibles, no vienen expresadas explícitamente sino en forma de restricciones y sin incertidumbre (excepto en optimización estocástica, que no es precisamente clásica)

Pero además de estos contextos de decisión de optimización clásica, existen otros que configuran lo que se suele denominar en términos amplios la teoría de la decisión. Tres grandes bloques son los que se suelen abordar en este análisis:

a) La *teoría de la decisión con incertidumbre o riesgo*, en la que se analiza la toma de decisiones con aleatoriedad o incertidumbre en los resultados, de modo que las consecuencias de una decisión no están determinadas de antemano, sino que están sujetas al azar.
b) La *decisión multicriterio*, en la que si bien dada una decisión sus consecuencias están perfectamente determinadas, lo que no está definido tan claramente es qué es lo mejor, existiendo varios objetivos en conflicto.
c) La *teoría de juegos*, en la que las consecuencias de una decisión no dependen únicamente de la decisión adoptada, sino, también de la que elijan otros jugadores. En este contexto, los problemas de decisión con aleatoriedad del bloque anterior suelen ser denominados juegos frente a la naturaleza.

A continuación, se presenta una introducción a estos tres enfoques de decisión.

I.2 Teoría de la decisión con incertidumbre o riesgo

Una de las situaciones que más dificultad lleva a la hora de tomar una decisión es aquella en la que las consecuencias de las decisiones no pueden ser controladas, sino que están sujetas a la aleatoriedad; esta aleatoriedad puede provenir, tanto porque el proceso pueda estar gobernado por el azar, como por una falta de información que nos impida determinar con exactitud cuáles son esas consecuencias.

El contexto en que nos encontramos por lo tanto, es aquél en que el decisor ha de tomar una decisión ante una situación con diversos estados gobernados por el azar.

Los elementos que intervienen en un proceso de decisión de estas características son

- $E = \{E_1, ..., E_m\}$: conjunto de estados de la naturaleza o posibles escenarios.
- $A = \{A_1, ..., A_n\}$: conjunto de posibles alternativas o decisiones
- X_{ij}: consecuencia de tomar la decisión A_i y se dé el estado E_j

En ocasiones también intervienen las probabilidades a la hora de tomar una decisión:

- p_j: probabilidad de que se dé el estado E_j; este valor en muchas ocasiones no es conocido.

Si estas probabilidades son conocidas (o han sido estimadas) antes de tomar la decisión, se dice que es un proceso de *decisión bajo riesgo*, mientras que si son desconocidas se habla de *decisión bajo incertidumbre.*

Con estos elementos, cuando el proceso se define en una sola etapa, es decir, hay una única decisión que tomar en un momento dado, y los conjuntos de estados y alternativas son finitos, para facilitar la comprensión de la situación, se representa el problema mediante una *tabla de decisión*:

	E_1	E_2	$\cdots$	E_m
	p_1	p_2	$\cdots$	p_m
A_1	X_{11}	X_{12}	$\cdots$	X_{1m}
A_2	X_{21}	X_{22}	$\cdots$	X_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_n	X_{n1}	X_{n2}	$\cdots$	X_{nm}

A la matriz central formada por las consecuencias, se le suele denominar *matriz de pagos o consecuencias*, tomada esta denominación más del contexto de la teoría de juegos que de la decisión clásica.

I.2.1 Criterios para valorar las posibles decisiones

La mayor dificultad en este contexto es cómo valorar una decisión o alternativa para poder compararla con otras. Así se presentan distintos criterios para valorar las alternativas y, según sea el criterio adoptado, decidir cuál es la decisión óptima.

Los criterios se clasifican según utilicen las probabilidades de los distintos estados o no. Los primeros está claro que sólo pueden ser utilizados cuando estas probabilidades son conocidas, mientras que los segundos pueden ser aplicados en cualquier caso.

Criterios utilizando las probabilidades de los estados de la naturaleza.

- *Criterio del valor esperado:*
  Este criterio supone seleccionar aquella alternativa cuyo pago esperado o medio sea mejor (si los pagos son beneficios la de mayor beneficio esperado y si son costes la de menor coste esperado).
  Este criterio es el más común cuando las probabilidades son conocidas, pero no tiene por qué ser el más apropiado. Obsérvese que si el proceso de decisión se repite muchas veces en idénticas condiciones las leyes de los grandes números aseguran que en el límite el pago medio es la esperanza. Así pues este criterio es apropiado cuando el proceso se va a repetir muchas veces, pero puede no serlo cuando se presenta una situación única, en la que el proceso no va a ser repetido.
- *Criterio de lo más probable*
  Este criterio supone elegir la alternativa con mejor valor para el estado más probable, es decir, visto cuál es el estado más probable elegir la alternativa con mejor valor en ese estado.
  Este criterio se suele utilizar más cuando el proceso de decisión no es iterativo, es decir, se lleva a cabo una única vez.
- *Criterio del escenario medio*
  En ocasiones, cuando el espacio de estados es numérico, también es posible establecer un escenario medio y buscar aquella alternativa óptima para este escenario. Tiene sentido hacerlo sobre todo con distribuciones continuas (espacio de estados infinito). Si las consecuencias son proporcionales al estado, este criterio es equivalente al del valor esperado. No es un criterio muy aconsejable, pues, el escenario medio puede distar mucho de los escenarios reales, aunque en ocasiones se utilice para simplificar el procedimiento.
- *Criterio del valor en riesgo VaR (value at risk)*
  Este criterio es especialmente útil cuando el conjunto de estados de la naturaleza es continuo o al menos tiene un número de posibles escenarios

muy elevado. Se basa en que normalmente el decidor siente aversión por el riesgo, mientras que para cantidades que superan un umbral las diferencias no le importan tanto. El VaR es un percentil de la distribución de la función de utilidad. Así si se trata del rendimiento de una inversión el VaR sería el percentil α, de modo que el $(100-\alpha)\%$ de las veces se espera superar ese valor, con lo que se elegirá la opción que tenga un VaR mayor (al revés si fueran costes). Habitualmente en finanzas se maneja el VaR como del 5%, y en ocasiones del 10%. Este criterio no suele usarse solo sino en compañía del criterio del valor esperado, entrando entonces en el mundo de la decisión multicriterio.

Criterios sin utilizar las probabilidades de los estados de la naturaleza

Estos criterios se utilizan cuando las probabilidades son desconocidas o ignoradas:

- *Criterio de Wald o minimax-maximin o pesimista*
  Para cada alternativa se supone que va a pasar lo peor, y elige aquella alternativa que dé mejor valor. De esta forma se asegura que en el peor de los casos se obtenga lo mejor posible, que corresponde a una visión pesimista de lo que puede ocurrir. En el caso de que los pagos sean costes esta filosofía supone elegir el mínimo de los máximos denominándose minimax, mientras que si son ganancias será el máximo de los mínimos, denominándose maximin.
- *Criterio optimista*
  Es el criterio justamente opuesto al anterior, para cada alternativa se supone que pasará lo mejor, y se elige la que dé mejor valor. Este criterio apenas es utilizado ya que no tiene en cuenta en ningún momento los riesgos que se corren al tomar una decisión.
- *Criterio de Hurwicz*
  Este criterio combina las actitudes pesimista y optimista, valorando cada alternativa con una ponderación entre lo mejor y lo peor posible. Esta ponderación se hace multiplicando lo mejor por un factor α entre 0 y 1, denominado *índice de optimismo*, y lo peor por $1-\alpha$, sumando ambas cantidades. Se elegirá la alternativa que mejor valor dé. Este criterio presenta la dificultad de estimar el valor del índice de optimismo del decisor, de modo que habitualmente se obtiene la solución para todos los posibles valores de este índice y se intenta situar al decisor en alguno de los intervalos resultantes del índice de optimismo.
- *Criterio de Savage o costes de oportunidad*
  Este criterio toma en consideración el coste de oportunidad o penalización o arrepentimiento por no prever correctamente el estado de la naturaleza.

Estos costes de oportunidad se evalúan para cada alternativa y cada estado, haciendo la diferencia entre lo mejor de ese estado y lo que proporciona esa alternativa para ese estado, construyendo la llamada matriz de penalizaciones o costes de oportunidad. Sobre esta matriz se aplican los criterios anteriores, pudiendo aplicarse el del coste esperado, o, lo que es más habitual, el criterio minimax conociéndose entonces también como criterio de minimizar el máximo arrepentimiento.

Vamos a ver un ejemplo para clarificar todos estos conceptos. Supóngase que en la demanda prevista para el mes siguiente de un determinado producto es 1, 2, 3 o 4, con probabilidades 0.1, 0.3, 0.4, y 0.2, respectivamente. Si un producto que es fabricado un mes se vende ese mismo mes el precio de venta será de 6500 euros, mientras que si ha de venderse el mes siguiente será de 4000. Los costes unitarios de producción son de 5000 euros.

Con estos datos se forma la matriz de decisión:

	$E_1 = 1$	$E_2 = 2$	$E_3 = 3$	$E_4 = 4$
	$p_1 = 0.1$	$p_2 = 0.3$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.2$
$A_1 = 1$	1500	1500	1500	1500
$A_2 = 2$	500	3000	3000	3000
$A_3 = 3$	-500	2000	4500	4500
$A_4 = 4$	-1500	1000	3500	6000

Las distintas alternativas seleccionadas para los distintos criterios serán:

- *Criterio de la ganancia esperada.*

Las esperanzas de ganancia son las siguientes: para A_1 1500, para A_2 2750, para A_3 3250 y para A_4 2750. Con lo que la decisión óptima es producir 3 artículos.

- *Criterio de lo más probable*

El estado más probable es E_3, y para este estado la mejor alternativa es pedir 3 artículos.

- *Criterio del escenario medio*

El escenario medio resulta ser : 1x0.1+ 2x0.3 + 3x0.4 + 4x0.2 = 2.7, cómo se ve no corresponde a ninguno de los estados ya que no es entero. Los beneficios serían para A_1 1500, para A_2 3000, para A_3 3750 y para A_4 2750, que como se ve no coinciden con los valores de la ganancia esperada. La alternativa elegida sería A_3.

- *Criterio de Wald.*

Los mínimos para cada decisión son 1500, 500, -500 y –1500, respectivamente, luego, la alternativa preferida sería producir 1 artículo.

- *Criterio optimista.*

En este caso los máximos son 1500, 3000, 4500, -1500, y por lo tanto, se elegiría producir 4 artículos.

- *Criterio de Hurwicz*

En este caso, para cada alternativa tenemos: A_1 1500, A_2 3000α+500(1-α), A_3 4500α-500(1-α) y A_4 6000α-1500(1-α). Si α<0.4, la alternativa sería producir 1 artículo, mientras que si es superior sería producir 4 artículos.

- *Criterio de Savage*

El primer paso es construir la matriz de penalizaciones o costes de oportunidad. La matriz la formamos por columnas, obteniendo el máximo de la columna y restándole a este valor el pago de cada alternativa. Así la matriz obtenida es:

0	1500	3000	4500
1000	0	1500	3000
2000	1000	0	1500
3000	2000	1000	0

Ahora aplicamos el criterio minimax, para minimizar la máxima penalización, obteniendo que los máximos son 4500, 3000, 2000 y 3000, por lo que la alternativa sería producir 3 artículos.

I.2.2 Valor esperado de la información perfecta (VEIP)

La idea en esta sección es que podría modificarse el conocimiento que se tiene acerca de los estados de la naturaleza. Esa modificación puede conllevar un coste y la pregunta es, ¿qué valor tiene disponer de esa información? ¿cuánto estamos dispuestos a pagar por ella? Hay que tener en cuenta que con mayor información la ganancia esperada será mayor.

Así, se define la ganancia esperada con información perfecta a la esperanza de la ganancia tomando para cada estado la mejor opción. Para el ejemplo de la sección anterior sería $0.1 \cdot 1500 + 0.3 \cdot 3000 + 0.4 \cdot 4500 + 0.2 \cdot 6000 = 4050$.

Por otro lado, se estima la ganancia esperada con incertidumbre, es decir, la ganancia esperada con la decisión que se haya tomado con alguno de los criterios anteriores. Así, si la decisión seleccionada es la A_3, la ganancia esperada es 3250.

Por último se define el valor esperado de la información perfecta, denotado por VEIP, a la diferencia entre ambas ganancias, es decir, la diferencia entre la ganancia esperada con información perfecta y la esperada con incertidumbre. Para el ejemplo sería VEIP= 4050 − 3250 = 800.

Obsérvese que es equivalente a utilizar el criterio de Savage con la mínima penalización esperada.

I.2.3 Procesos decisión polietápicos: Árboles de decisión

Otra situación muy habitual en un proceso de decisión es que no sea un proceso estático, sino dinámico, es decir, que sea un proceso secuencial de decisión-azar, donde secuencialmente se van tomando decisiones y va actuando el azar condicionando las decisiones posteriores. Esta situación es absolutamente análoga a la de la programación estocástica, y en particular, a la de la programación dinámica estocástica.

Para representan la aleatoriedad por etapas se suele utilizar los denominados *árboles de escenarios.* Sin embargo, para nuestro contexto no es suficiente representar la aleatoriedad, ya que las decisiones tomadas en el proceso condicionan lo que puede o no darse posteriormente, representándose en un *árbol de decisión* la secuencia de aleatoriedad y decisiones que conforman el proceso. Esta representación es apropiada cuando tanto el espacio de estados como el de las decisiones es discreto.

Para representar gráficamente en un árbol de decisión el proceso se utilizan los siguientes elementos y notación:

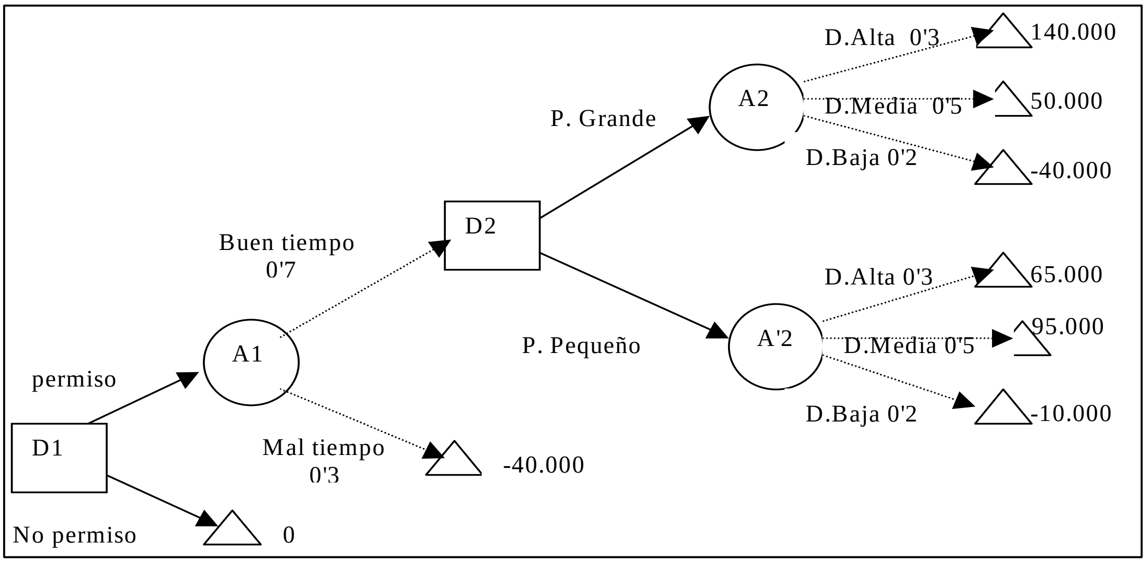
- Vértice de azar: son vértices que representan puntos en los que la naturaleza elige un estado. De estos vértices salen tantos arcos como estados de la naturaleza posibles hay en ese punto, y se representan mediante un círculo.
- Vértice de decisión: son vértices que representan puntos en los que hay que tomar una decisión. De ellos salen tantos arcos como alternativas posibles hay en ese punto, y se representan mediante un cuadrado.
- Vértice inicial o raiz: es la raíz del árbol, de donde salen tantos arcos como decisiones iniciales hay, ya que en un proceso de estas características lo primero es tomar una decisión.
- Vértice terminal u hoja: son los vértices finales de una rama que es sucesión de estados y decisiones. Se les asigna el coste o beneficio (según sea la función objetivo a evaluar) del camino seguido para llegar a él, y se representan por un triángulo.

El árbol se construye de la raíz a las hojas, mostrando el proceso secuencial que es seguido. Una vez acabado se valora de las hojas a la raíz de la siguiente forma:

- Nodos de azar: se valoran con alguno de los criterios mostrados para valorar decisiones, en general, suele ser el del valor medio, pero, no tiene por qué ser así.
- Nodos de decisión: se valoran eligiendo la mejor decisión según el criterio considerado. Las decisiones no seleccionadas se consideran rechazadas y con ello todos los caminos que salgan de ese arco.

Veamos el siguiente ejemplo. Un vendedor ambulante ha de decidir en el mes de Enero si va a acudir a una feria que se celebra en el mes de septiembre, porque en el caso en que sea que sí tendrá que pagar 40.000 euros de licencia para poder montar su puesto en la feria. Un mes antes de la feria se conocen las previsiones meteorológicas para el mes de septiembre, de modo que si estas son de mal tiempo el vendedor sabe que lo más rentable es no ir a la feria. Por experiencias de años anteriores sabe que el 30% de las veces estas previsiones son de mal tiempo. En el caso de que sean buenas las previsiones, el vendedor decidirá ir a la feria y hacer el pedido de productos a vender. Puede hacer dos tipos de pedido: un pedido grande de 900 unidades, con un precio unitario de compra de 100 euros y un precio de venta de 300 euros, o un pedido pequeño de 600 unidades que comprará a 125 euros y venderá a 350. Una vez en la feria, este vendedor estima que la demanda puede ser de tres tipos: demanda alta de 900 unidades, media de 600 unidades, y baja de 300 unidades, con probabilidades 0.3, 0.5 y 0.2, respectivamente. Sin embargo, se da la circunstancia de que si la demanda es mayor que la cantidad de productos que ha llevado el precio de venta se verá reducido en 50, en concepto de penalización.

Este problema es claramente un proceso secuencial de decisiones y aleatoriedad que puede ser representado gráficamente mediante el siguiente árbol de decisión:



La valoración de los nodos se hace como sigue:

- Nodo A2: habrá que valorarlo según alguno de los criterios vistos, por ejemplo si utilizamos el del valor medio se valorará con 59.000, si fuera el de Wald con –40.000. En cualquier caso hay que definir uno de ellos para todos los nodos, así que lo desarrollaremos según el criterio del valor medio.

- Nodo A'2: puesto que se ha decidido hacerlo según el criterio del valor medio, será 65.000.
- Nodo D2: al ser un nodo de decisión se valora con el mejor valor de los nodos conectados a él, es decir, el mejor de A2 y A'2, con 65.000
- Nodo A1: es un nodo de azar, luego se valora por el criterio adoptado con la media del nodo 45.500.
- El otro nodo es un nodo terminal valorado con 0.
- Nodo D1: es un nodo de decisión en el que se elige entre 45.500 y 0, con lo que resulta valorado 3n 45.500. Además es el nodo inicial, con lo que ya se ha valorado todo el árbol.

Así la política óptima resulta ser pedir el permiso en Enero, y si hace buen tiempo ir con pedido pequeño. Esta política óptima nos da una ganancia esperada de 45.500 euros.

En bastantes situaciones es posible incorporar información al árbol de decisión de manera parcial. Para llevar a cabo esta incorporación ha de utilizarse el *análisis bayesiano*. Este análisis modifica las probabilidades de los escenarios en función de la nueva información de que se dispone.

El análisis bayesiano se fundamenta en los dos resultados de probabilidad más utilizados en el cálculo de probabilidades condicionadas: el teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total.

El teorema de la probabilidad total permite calcular la probabilidad de un suceso a partir de las probabilidades de este suceso condicionadas a otros sucesos que formen un sistema completo, es decir, cuya unión sea todo el espacio muestral y sean disjuntos. Así si $\{B_1,\dots,B_n\}$ son tales que $\bigcup B_i = \Omega$ y $B_i \cap B_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$, para cualquier suceso (no necesariamente sobre el mismo espacio) se tiene

$$P(A) = \sum_i P(A / B_i) \cdot P(B_i)$$

Por otra parte el teorema de Bayes establece la probabilidad de un suceso A condicionada a la ocurrencia de otro suceso, cuando la información de la que se dispone es del condicionado inverso:

$$P(B / A) = \frac{P(A / B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Supóngase que en el ejemplo anterior, el vendedor dado la suma tan alta que está en juego busca desesperadamente alguien que pueda darle información adicional en Enero acerca de lo que va a ocurrir con el clima en septiembre. Al fin encuentra a un experto meteorólogo que le dice que él puede hacer una predicción por 10.000 euros de nada, y que ya lo ha hecho más veces con los siguientes resultados:

- cuando hizo bueno acertó 3 de cada 5 veces
- cuando hizo malo acertó 2 de cada 5 veces.

Al vendedor entonces se le presenta una decisión previa a decidir si va a pedir el permiso que es si consultar al experto. Así ahora el nodo inicial es otro del que salen dos arcos, uno que es consultar al experto y otro que es no hacerlo. En el caso de que no le consulte todo se mantiene igual exactamente que antes, con lo que el nodo que sale de ahí ya estaría valorado: 45.500. Quedaría por valorar el otro nodo, pero hay que tener en cuenta que tras la consulta viene un nodo de azar acerca del resultado de la consulta, y que además según sea este resultado modifica las posteriores probabilidades de ocurrencia de buen tiempo y mal tiempo (todo ello fiándonos de lo que dice el experto, claro está).

Así, primero necesitamos obtener las probabilidades de lo que dirá el experto.

Empecemos por recopilar y denotar la información disponible. Llamaremos B al suceso hace buen tiempo en septiembre y M al suceso hace mal tiempo. Llamaremos DB al suceso el experto dice que va a hacer buen tiempo, y DM al suceso el experto dice que va a hacer mal tiempo.

La información de la que disponíamos ya es $P(B)=0.7$ y $P(M)=0.3$. Por otra parte, ahora nos dicen $P(DB\,/\,B)=3/5=0.6$ y $P(DM\,/\,M)=2/5=0.4$, de los que se deducen por complementariedad, $P(DM\,/\,B)=1-3/5=0.4$ y $P(DB\,/\,M)=1-2/5=0.6$. De estos datos, aplicando el teorema de la probabilidad total podemos obtener directamente la probabilidad de que el experto diga que hará bueno o que diga que hará malo:

$$P(DB)=P(DB\,/\,B)P(B)+P(DB\,/\,M)P(M)=0.6\times 0.7+0.6\times 0.3=0.6$$

$$P(DM)=P(DM\,/\,B)P(B)+P(DM\,/\,M)P(M)=0.4\times 0.7+0.4\times 0.3=0.4$$

Este último valor podía haberse obtenido directamente por complementariedad.

Estas serán las probabilidades de los arcos que salen del nodo del experto, pero según sea una u otra afectará a las probabilidades que habrá que poner en los arcos posteriores cuando se llegue al nodo de la previsión meteorológica de septiembre, ya que las probabilidades han de ser probabilidades condicionadas a los valores que la aleatoriedad haya tomado previamente. Así en los arcos posteriores al que dice que el experto dice que hará bueno, las probabilidades que hay que situar son $P(B\,/\,DB)$ y $P(M\,/\,DB)$, mientras que en las que derivan del estado dice el experto que hará malo serán condicionadas al suceso DM. Por lo tanto, hay que calcular estas probabilidades condicionadas ya que no las tenemos y para ello se utiliza el teorema de Bayes:

$$P(B\,/\,DB)=\frac{P(DB\,/\,B)P(B)}{P(DB)}=\frac{0.6\times 0.7}{0.6}=0.7$$

$$
\begin{aligned}
P(M\,/\,DB) &= \frac{P(DB\,/\,M)P(M)}{P(DB)} = \frac{0.6\times 0.3}{0.6} = 0.3\\
P(B\,/\,DM) &= \frac{P(DM\,/\,B)P(B)}{P(DM)} = \frac{0.4\times 0.7}{0.4} = 0.7\\
P(M\,/\,DM) &= \frac{P(DM\,/\,M)P(M)}{P(DM)} = \frac{0.4\times 0.3}{0.4} = 0.3
\end{aligned}
$$

Estas probabilidades son las que habría que poner entonces en las ramas correspondientes y valorar de nuevo toda esta parte del árbol. Sin embargo, en este caso no es necesario, ya que resulta evidente que las probabilidades de que haga buen o mal tiempo no se ven afectadas por lo que diga el experto, de modo que éste no es más que un embaucador que pretende engañar al vendedor y aprovecharse de su buena fe. Suerte que nuestro vendedor sabe de cálculo de probabilidades y de teoría de la decisión.

I.2.4 Utilidad: concepto y funciones de utilidad

Por último, dentro de esta introducción a la teoría de la decisión vamos a hablar de un concepto muy utilizado en este contexto, la utilidad.

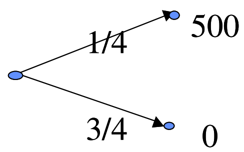
En lo que hemos visto siempre hemos supuesto que las alternativas tienen pagos cuantificables, sin embargo, no siempre es cierto. Valoraciones de tipo calidad, prestigio, etc. no son valores numéricos. Por otra parte, aunque los pagos sean numéricos el valor que nosotros damos a una cantidad, que es personal, no siempre es proporcional a ella. Obsérvese que para una persona determinada y en un contexto determinado, no es lo mismo ganar de repente un millón de euros teniendo un capital de 10 euros, que disponiendo ya de 100 millones de euros ganar ese millón. O visto de forma negativa, no es lo mismo perder un millón cuando no tienes nada, que perderlo cuando tienes 100 millones.

Para reflejar esta valoración de los pagos, no por el pago en sí, sino por el valor que tiene éste para el decisor, se utiliza la *utilidad,* que es una valoración personal de una cantidad que no varía proporcional al importe de esa cantidad.

La utilidad se plasma en la *función de utilidad* que es una función que resume la importancia que esa persona asocia a diferentes cantidades. Se trata de un índice o escala personal del decisor, y por lo tanto, diferente para cada persona que lo plantee, que ha de ser no decreciente (a mayor importe, mayor utilidad).

La formalización de lo que ha de cumplir una función para poder ser una función de utilidad, se hace axiomáticamente. No hay una única forma de establecer los axiomas que ha de cumplir una función de utilidad. A continuación, se presenta la axiomática planteada por Von Neumann y Morgenstern cuando introdujeron este concepto. Para ello definiremos lo que son las loterías y la relación de equivalencia entre ellas, para poder definir la relación de preferencia que ha de reflejar una función de utilidad.

Una lotería viene dada por un conjunto de valores posibles de ganancia y unas probabilidades. Formalmente se describe como $(p_1, r_1; \ldots; p_n, r_n)$, donde p_i denota la probabilidad de obtener una ganancia r_i. Por ejemplo, dada una lotería que gráficamente sería



se denotaría por (1/4, 500; 3/4, 0).

Se define la relación $L_1 p L_2$ si la lotería L_1 es preferida a la lotería L_2, y la relación de equivalencia $L_1 i L_2$ si la lotería L_1 es indiferente a la lotería L_2, es decir, son equivalentes.

Dadas estas definiciones, podemos definir formalmente la utilidad de una cantidad r_i en función de una lotería y que denotaremos por $u(r_i)$ como el valor q_i tal que es equivalente recibir con seguridad la cantidad r_i, que sería la lotería $(1, r_i)$ a la lotería en que se recibe con probabilidad q_i el valor más favorable de la lotería de referencia y con probabilidad $1 - q_i$ el resultado menos favorable.

La función de utilidad sería la función que especifica todos los pagos de la lotería, y la utilidad esperada de una lotería sería $\sum_i p_i u(r_i)$. Así pues, las alternativas de un problema de decisión se pueden ver como loterías, ya que se tienen unos pagos con ciertas probabilidades cuando es decisión bajo riesgo.

Dadas estas definiciones, se pueden mostrar los axiomas que Von Neumann y Morgestern establecieron para que una relación de preferencia/indiferencia pueda definir una función de utilidad.

Axiomas de Von Neumann y Morgestern

Ax ioma 1: De ordenación completa

Dados r_1 y r_2 r2 se cumple: $r_1 p r_2$ o $r_2 p r_1$ o $r_1 i r_2$. Además esta ordenación ha de cumplir la propiedad de transitividad ($r_1 p r_2$ y $r_2 p r_3$ implica que $r_1 p r_3$).

Ax ioma 2: De continuidad

Si $r_1 p r_2$ y $r_2 p r_3$ entonces existe c tal que $(1, r_2) i (c, r_1; 1 - c, r_3)$

Ax ioma 3: De independencia

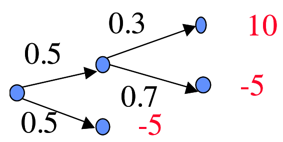
Si $r_1 i r_2$ entonces $\forall c \in (0,1)$ son indiferentes $(c, r_1; 1 - c, r_3)$ y $(c, r_2; 1 - c, r_3)$

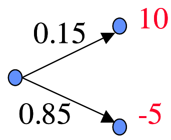
Ax ioma 4: De probabilidad desigual

Si $r_1 p r_2$ entonces $(c, r_1; 1 - c, r_2) p (c', r_1; 1 - c', r_2)$ si $c > c'$

Ax ioma 5: De probabilidad desigual

Dada una lotería compuesta existe una equivalente simple. Por ejemplo, son equivalentes las siguientes dos loterías:





La función de utilidad aunque no vaya entre 0 y 1 puede ser transformada a este rango. Sea $u(x)$ una función de utilidad, y sea $v(x) = a\,u(x) + b \ \ (a > 0)$. Entonces:

- $L_1 p L_2$ usando $u(x)$ si y sólo si $L_1 p L_2$ usando $v(x)$
- $L_1 i L_2$ usando $u(x)$ si y sólo si $L_1 i L_2$ usando $v(x)$

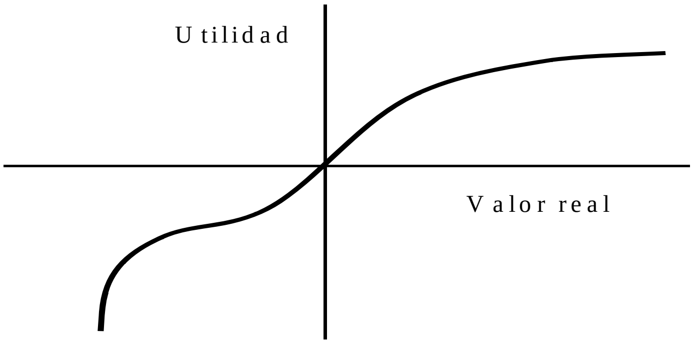
De modo que si la función de utilidad de un individuo no va entre 0 y 1, se puede transformar a este rango utilizando la función de utilidad $v(x) = \dfrac{x - \min(u(x))}{\max(u(x)) - \min(u(x))}$.

Por último, restaría saber como estimar la función de utilidad de un individuo. Para ello, se propone ir comparando loterías, de modo que en unas se obtenga un valor seguro y en otras ciertos valores con determinadas probabilidades, o viceversa. Por ejemplo, se parte de $u(\min(x)) = 0$ y $u(\max(x)) = 1$. A continuación, para saber qué valor tendrá utilidad ½, se pide que el individuo diga cuál es la cantidad en que para él es indiferente recibir esa cantidad con seguridad frente a jugar una lotería en que puede obtener el máximo con probabilidad ½ y el mínimo con probabilidad también ½ (es decir, sería la lotería $(1/2, \max(x); 1/2, \min(x))$). A continuación, hacer lo mismo con el de ¼ (pero utilizando en la lotería de comparación en lugar de el máximo el valor obtenido antes de utilidad ½), con el de ¾,... y así sucesivamente, hasta describir la función de utilidad.

Una función de utilidad de un individuo ha de representar la conducta ante el riesgo de este individuo. Para ello, se define el *equivalente de certeza* de una lotería ($CE(L)$) como el valor en que es indiferente ese valor seguro a la lotería L, y v*entaja de riesgo* ($RP(L)$) a la diferencia entre el valor esperado de la lotería y su equivalente de certeza, es decir, $\mathrm{E}[L] - CE(L)$. Según sea el signo de este valor supondrá que hay preferencia por el riesgo o por el contrario aversión al riesgo. Más concretamente, se puede resumir en los siguientes tres tipos de actitud ante el riesgo:

- Contrario a los riesgos o aversión al riesgo: $RP(L) > 0$ (la función de utilidad sería cóncava)
- Neutral frente a riesgos: $RP(L) = 0$ (la función de utilidad sería una línea recta)
- Preferencia por el riesgo: $RP(L) < 0$ (la función de utilidad sería convexa)

Una gráfica de una posible función de utilidad es la que se tiene a continuación. Las zonas cóncavas (en la gráfica las extremas) suponen zonas de aversión al riesgo ya que dados dos puntos la cuerda que los une, que representaría la neutralidad queda por debajo, lo que supone valorar más la cantidad que su propio valor. Sin embargo las zonas convexas representan preferencia por el riesgo ya que valoran por debajo las cantidades.



Es muy habitual aplicar todos los conceptos de decisión vistos previamente con utilidades más que con las cantidades reales para reflejar claramente el carácter del decisor.

I.3 Decisión multicriterio

I.3.1 Introducción: conceptos básicos

Se puede decir que un problema general de decisión consiste en elegir lo mejor entre lo posible. Esta definición, como ya se ha visto, implica definir qué es lo mejor y qué es lo posible.

Respecto a lo posible, se trata de establecer las alternativas o puntos factibles existentes. El conjunto puede ser discreto o continuo. En general, se considera discreto y se aplica la metodología apropiada cuando es factible enumerar y tratar explícitamente cada uno de las alternativas posibles. En el caso continuo o caso discreto donde no viene explícitamente definido el conjunto de alternativas es cuando se habla de conjunto o región factible. Este conjunto o región factible, a su vez, puede venir definido de forma rígida mediante restricciones o de forma más flexible mediante lo que se conoce como *niveles de aspiración.*

Respecto a lo mejor, se puede definir según un único criterio o según varios criterios. Los problemas de decisión con un único criterio y conjunto factible continuo (entendiendo por éste la extensión a conjuntos discretos no definidos explícitamente) son básicamente problemas de optimización "clásica": lineal, entera o no lineal. Si además incluyen aleatoriedad, estaríamos ante un problema de optimización estocástica. Si el conjunto factible es discreto, sólo tiene sentido plantearse el problema en el caso de que haya aleatoriedad, siendo entonces un problema de los conocidos como problemas clásicos de decisión[1] y visto en la sección anterior.

En el caso en que haya varios criterios, si la región factible es continua, se puede resolver el problema mediante métodos denominados de *optimización multiobjetivo* o mediante *métodos satisfacientes* (*programación por metas*). Si lo posible viene definido por un conjunto discreto de alternativas (pudiendo incluso no ser numérico el valor de los criterios), existen métodos multicriterio discretos para resolver el problema.

De forma general un problema de decisión multicriterio vendría formulado de la siguiente forma:

[1] No tiene sentido sin aleatoriedad, ya que si el conjunto está definido explícitamente y no hay aleatoriedad, basta una exploración de las alternativas para ver cuál es la mejor.

$$\text{opt } z(x) = (z_1(x),....,z_p(x))$$
$$x \in F$$

donde F es el espacio de decisiones o soluciones (si es continuo, se denomina región factible, $F \subseteq \mathbb{R}^n$).

Al conjunto $z(F)$ se le denomina *espacio de objetivos* o *resultados* (en el caso de que sean criterios numéricos $z(F) \subseteq \mathbb{R}^p$).

A continuación se exponen algunos conceptos básicos de la decisión multicriterio:

Atributo: "valor" observado (medido) de una decisión independientemente del decisor. Los atributos suelen ser competetidores o contradictorios entre sí.
Objetivo: dirección de mejora de un atributo. Esta dirección será de maximización o minimización en el caso de atributos numéricos y en el caso de atributos no numéricos vendrá dado por un sistema de preferencias (por ejemplo, si el problema fuera la selección de un automóvil, el color sería un atributo no numérico y se establecería un sistema de preferencias sobre este atributo).
Nivel de aspiración: es un nivel aceptable de logro para un atributo.
Meta: es la combinación de un atributo con su nivel de aspiración.
Criterio: son los atributos, objetivos o metas relevantes en un problema de decisión.

Dadas estas definiciones previas, lo primero que se necesita en un problema de decisión multicriterio es dar un concepto de solución. El concepto de solución utilizado habitualmente es el concepto de óptimo de Pareto. Este concepto está basado en el *criterio de optimalidad paretiana*, enunciado por Pareto en 1896:

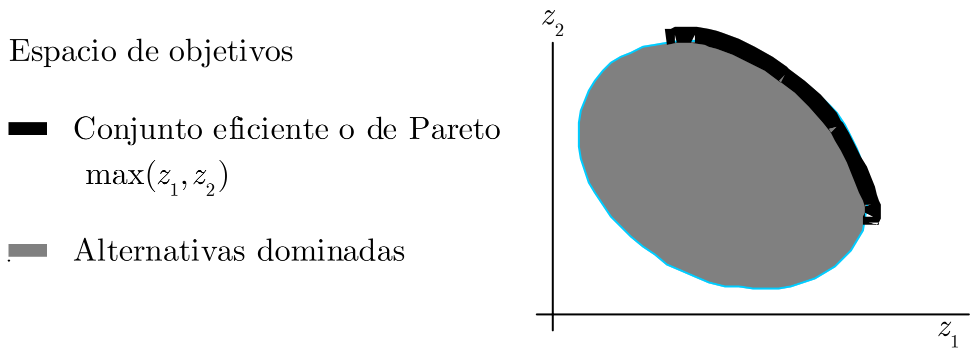
"Una alternativa es *eficiente* (o *Pareto óptima*) si toda alternativa que proporcione una mejora en un atributo produce un empeoramiento en al menos otro de los atributos."

De esta definición, se deriva la de *alternativa dominada* o *no eficiente,* como una alternativa para la que existe otra alternativa con todos los atributos mejores.

Así se define el *conjunto eficiente* o *de Pareto* o también llamada *frontera de Pareto* (por su representación en el caso continuo como parte de la frontera del espacio de objetivos o resultados) para atributos numéricos con objetivos de maximización como

$$\varepsilon = \left\{ x \in F : \nexists x' \in F / z_k(x') \geq z_k(x)\ \forall k \text{ y } z_t(x') > z_t(x) \text{ para al menos un } t \in \{1,...,p\} \right\}$$

Un ejemplo gráfico para dos atributos podría ser el siguiente:



Sin embargo, en la mayoría de las situaciones, el fin último es dar una única solución, no un conjunto de posibles soluciones. Se denomina *solución de mejor compromiso* a la solución del conjunto eficiente que es seleccionada por el decisor.

A continuación, vamos a ver diferentes métodos usados en decisión multicriterio continua. Básicamente hay dos enfoques dentro de estos métodos: los métodos de optimización multiobjetivo y los métodos satisfacientes o programación por metas.

I.3.2 Métodos de optimización multiobjetivo

Estos métodos buscan optimizar los objetivos satisfaciendo unas restricciones rígidas que determinan la región factible. El planteamiento del problema sería

$$\max z = (z_1(x), \ldots., z_p(x))$$
$$x \in F$$

donde $z_i(x)$ es la función matemática que describe el atributo i-ésimo, $x \subseteq \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión y F es el conjunto de restricciones que definen las posibles soluciones.

Dentro de los métodos de optimización multiobjetivo existen métodos para generar el conjunto eficiente en su totalidad y métodos para dar una solución compromiso.

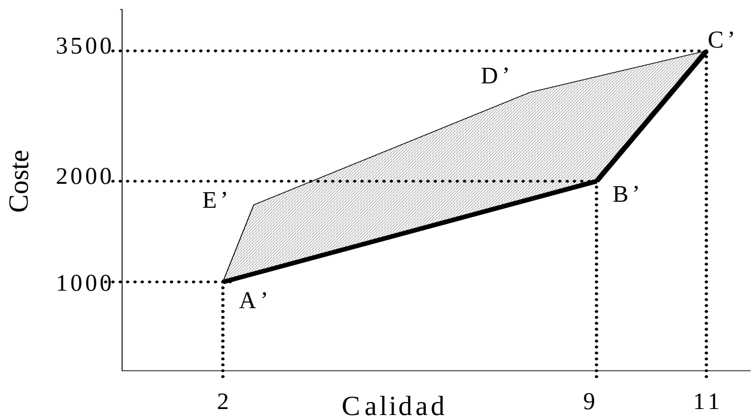
Antes de ver estas técnicas se van a presentar dos conceptos que serán de gran utilidad para comprender e interpretar el problema planteado: la matriz de pagos y las tasas de intercambio.

La *matriz de pagos* (pay-off matrix) es una matriz donde se representan por filas el valor óptimo de un objetivo sin considerar el resto de objetivos (resolviendo el problema independientemente), y los valores que resultarían para los demás objetivos con esa solución. Esta matriz representa el grado de conflicto que hay entre los objetivos propuestos.

Por ejemplo, supóngase un problema en que hay que determinar la composición de una mezcla a partir de unas ciertas componentes básicas. Supóngase que se desea que el coste unitario de la mezcla sea mínimo pero que la calidad sea máxima, medida ésta como una función de las componentes. Se tendrían entonces dos objetivos contrapuestos: minimizar el coste y maximizar la calidad. La matriz de pagos sería de la forma

	Coste	Calidad
Coste	m_{11}	m_{12}
Calidad	m_{21}	m_{22}

donde m_{11} es el mínimo coste que se puede lograr con las restricciones impuestas en el problema y m_{12} es la calidad para la composición que da el mínimo coste; en la siguiente fila sería al revés, es decir, m_{22} sería la máxima calidad que se puede lograr de la mezcla, y m_{21} sería el coste de esa mezcla. Así, si el espacio de objetivos fuera el siguiente, donde el conjunto eficiente está marcado en negrita,



la matriz de pagos sería

	Coste	Calidad
Coste	**1000**	2
Calidad	3500	**11**

Por otra parte, las *tasas de intercambio* (trade-offs o costes de oportunidad) entre los atributos representan lo que se está dispuesto a empeorar de un objetivo por mejorar en una unidad otro objetivo. Serían las pendientes de los segmentos que forman el conjunto eficiente. Así, en el segmento A'B' la tasa de intercambio entre el coste y la calidad será $T_{A'B'} = \dfrac{2000-1000}{9-2} = 142.86$, es decir, en ese segmento cada unidad más de calidad "cuesta" 142.86 unidades. Análogamente, para el segmento B'C' la tasa será $T_{B'C'} = \dfrac{3500-2000}{11-9} = 750$. Es decir, cada unidad más de calidad "cuesta" 750 unidades monetarias.

I.3.2.1 Técnicas generadoras del conjunto eficiente

Son técnicas de carácter mecánico, en las que no se incluyen las preferencias del decisor. El fin para el que están diseñadas es la obtención de todo el conjunto eficiente, en general, tras aplicar métodos de programación paramétrica.

Método de las ponderaciones [Zadeh, 1963]

Este método consiste en multiplicar cada objetivo por un peso o factor no negativo y agregarlos en una única función. Variando los pesos se puede obtener todo el conjunto eficiente, resolviendo los distintos problemas planteados mediante programación paramétrica.

$$\left.\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z_i(x) \\ x \in F \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} P(\lambda)$$

Uno de los resultados en que se fundamenta este método dice que si $\lambda_i > 0$ $\forall i$, entonces cualquier solución óptima del problema $P(\lambda)$ es eficiente. El recíproco es cierto sólo bajo ciertas condiciones (por ejemplo, si todas las funciones objetivo y las restricciones son lineales).

En cualquier caso, hay que tener en cuenta que para aplicar este método (y no sólo éste) es conveniente haber normalizado previamente los criterios (para que no influya la diferencia de unidades de los criterios).

Método de las ε-restricciones [Marglin, 1967]

Consiste en optimizar uno de los objetivos e incorporar el resto como restricciones paramétricas, resolviendo el problema resultante mediante programación paramétrica (variando los términos de la derecha se obtiene todo el conjunto eficiente).

$$\left.\begin{array}{ll} \max z_l(x) & \\ x \in F & \\ z_k(x) \geq \varepsilon_k & k = 1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,p \end{array}\right\} P_l(\varepsilon)$$

El fundamento de este procedimiento se recoge en los dos resultados siguientes:

Teorema: Si la solución del problema $P_l(\varepsilon)$ es única, entonces es una solución eficiente.

Teorema: Si x^* es eficiente, $\forall l \ \exists \varepsilon_k$ tales que x^* es solución óptima de $P_l(\varepsilon)$.

Método simplex multiobjetivo [Zeleny, 1973]

Este método sólo es aplicable para objetivos y restricciones lineales. Se trata de una extensión del método simplex que evalúa en cada iteración la eficiencia de las soluciones básicas obtenidas (puntos extremos), obteniendo así todos los puntos extremos eficientes. El conjunto eficiente serán todas las combinaciones lineales convexas de puntos extremos eficientes que sean adyacentes.

I.3.2.2 Programación compromiso

En la programación compromiso el fin último es seleccionar un punto del conjunto eficiente y, para ello, naturalmente, ha de incluir las preferencias del decisor. Las técnicas que se presentan fueron desarrolladas inicialmente en los trabajos de Yu(1973) y Zeleny (1973, 1974).

Se define el *punto* o *alternativa ideal*, como un punto del espacio de objetivos que recoge los valores óptimos de los objetivos individualmente tratados y se denota por $z^* = (z_1^*,...,z_i^*,...,z_p^*)$, siendo $z_i^* = \max_{x \in F} z_i(x)$, denominándose este valor individual *punto ancla*.

Se define la *solución óptima* o *mejor solución compromiso*, como la solución eficiente más próxima al punto ideal (axioma de [Zeleny, 1973]).

La cuestión ahora es definir una distancia que ha de ser minimizada sobre el conjunto eficiente. Para ello se define el grado de proximidad del objetivo i-ésimo normalizado como $d_i(x) = \dfrac{z_i^* - z_i(x)}{z_i^* - z_{*i}}$, siendo z_{*i} el antiideal del objetivo, es decir, el peor valor posible para el objetivo sobre el conjunto eficiente.

Estos grados de proximidad son agregados para definir una métrica:

$$\min_{x \in F} L_\pi = \left[\sum_{i=1}^{p} w_i^\pi \left(\frac{z_i^* - z_i(x)}{z_i^* - z_{*i}} \right)^\pi \right]^{1/\pi}$$

donde el conjunto de los pesos w_i suponen una ponderación preferencial de los criterios (ponderación subjetiva dada por el decisor, este sistema de ponderación se puede intentar obtener del decisor por varios métodos descritos en la literatura, como son el método de ordenación, el método de Saaty, ...).

Para los distintos valores de π se obtienen diferentes métricas. Así $\pi = \infty$, denota la distancia de Tchebychev o lo que es lo mismo minimizar la máxima distancia (así se obtiene una solución equilibrada, en que todos los grados de proximidad individuales están acotados, siendo a su vez un problema lineal).

Para el caso $\pi = 1$, se trata de una agregación lineal de distancias ponderadas, que también mantiene el carácter lineal del problema.

En general, para diferentes valores de π se obtiene diferente solución, de ahí que se haya definido el *conjunto compromiso*, como el conjunto de soluciones que se obtienen al variar π. Para el caso de dos objetivos, es usual dar el conjunto definido por el segmento $[L_1, L_\infty]$ (es decir, el segmento que une las soluciones obtenidas con las dos métricas comentadas anteriormente), ya que bajo ciertas condiciones es cierto que el conjunto compromiso coincide con este segmento.

I.3.3 Métodos satisfacientes: programación por metas

Los métodos satisfacientes se basan en la denominada lógica satisfaciente enunciada por Simon en 1955:

"en los contextos actuales de decisión (información incompleta, recursos limitados, conflictos de intereses, ...) el decisor más que optimizar unas funciones objetivo intenta que una serie de metas se aproximen lo más posible a unos niveles de aspiración prefijados."

De ahí que se desarrollara, basándose en esta filosofía, la denominada *programación por metas* ([Charnes y Cooper, 1961], [Lee, 1972] e [Ignizio, 1976]).

La idea de este método es que si un atributo tiene por expresión matemática $z_i(x)$ y para este atributo se tiene un *nivel de aspiración*, es decir, un nivel aceptable de logro para un atributo, $\hat{z}_i$, entonces una *restricción meta* sería una restricción de la forma $z_i(x) \geq \hat{z}_i$.

Sin embargo, dado que son niveles de aspiración, una restricción meta, en general, no puede ser incluida como una restricción rígida en el problema, ya que soluciones que no logren ese nivel de aspiración también son soluciones admisibles. Así, una restricción meta se formula utilizando *variables de desviación*: $z_i(x) + n_i - p_i = \hat{z}_i$. De estas variables, una de ellas es una variable no deseada: si la meta es "al menos" un valor, la variable no deseada será n_i, y si es del tipo "a lo sumo", la variable de desviación no deseada será p_i.

Así el problema a resolver, suponiendo que todos los objetivos fueran de tipo maximizar sería:

$$\min_{x \in F \cap \text{restricciones meta}} \sum_{i=1}^{p} n_i$$

Este procedimiento se puede aplicar también a las restricciones del problema para relajarlas, admitiendo soluciones "cercanas" a la región factible (el mismo concepto se ha aplicado en lógica difusa para resolver problemas de programación lineal).

La programación por metas aplicada en la realidad muestra que se están obteniendo valiosos resultados, siendo una de las técnicas de decisión multicriterio que está proporcionando mejores resultados. Sin embargo, no está exenta de detractores que critican aparentes debilidades del modelo que se presentarán más adelante.

Algunas variantes de este método se han desarrollado con gran éxito y se exponen a continuación.

I.3.3.1 Variantes de la programación por metas

Programación por metas ponderadas

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i n_i + \beta_i p_i) \\
&z_i(x) + n_i - p_i = \hat{z}_i \quad i = 1,\dots,p \\
&x \in F \\
&n_i \geq 0,\ p_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,p
\end{aligned}$$

La idea básica es ponderar las variables de desviación, ya que pueden tener diferente relevancia las metas o diferentes unidades si no han sido previamente normalizados los criterios.

Los distintos criterios, en general, vendrán dados en distintas unidades, así que la función objetivo estaría agregando valores de distintas unidades. Una primera medida, muy deseable, es ponderar las desviaciones dividiendo por el nivel de aspiración, con lo que serían desviaciones porcentuales que no tienen unidades y que corrigen el efecto de las distintas magnitudes de éstas.

Por otra parte, si sólo se ponderan dividiendo por el nivel de aspiración, implícitamente lo que se está haciendo es dar una misma importancia a todos los criterios. Si no es ése el caso, se deben multiplicar por pesos que muestren la relevancia dada por el decisor a cada meta.

Programación por metas MINIMAX o Tchebychev

En este caso se busca una solución "equilibrada", de modo que ninguna de las metas se desvíe en exceso de su nivel de aspiración. Para ello se minimiza la máxima distancia a este nivel, es decir, el problema se plantearía en estos términos

$$\begin{aligned}
&\min d \\
&\alpha_i n_i + \beta_i p_i \leq d \quad i = 1,\dots,p \\
&z_i(x) + n_i - p_i = \hat{z}_i \quad i = 1,\dots,p \\
&x \in F \\
&n_i \geq 0,\ p_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,p
\end{aligned}$$

Programación por metas lexicográficas

Este procedimiento establece niveles de prioridad en las metas y resuelve secuencialmente el problema para cada nivel de prioridad, manteniendo los valores previamente obtenidos para metas con mayor nivel de prioridad. Así, si en un problema se formulan k metas es posible que se consideren agrupadas en $h\ (\leq k)$ niveles de prioridad. Por ejemplo, si el problema incluye 6 metas, que denominaremos $g_i(n,p), i = 1,...,6$, agrupadas en 3 niveles de prioridad de la forma las más importantes las dos primeras, después la tercera, y por último las 3 últimas, el problema se representa como

$$Lex \min a = [g_1(n,p) + g_2(n,p), g_3(n,p), g_4(n,p) + g_5(n,p) + g_6(n,p)]$$

Para resolver el problema, se resolvería primero con las dos primeras metas. Obtenidos los valores de las variables de desviación no deseadas para éstas, se fijan y se resuelve el problema para la tercera meta (segundo nivel de prioridad). Una vez resuelto, se fija el valor de la variable no deseada también para esta meta, y se resuelve el tercer nivel incluyendo las tres últimas metas.

I.3.3.2 Temas críticos en programación por metas

A pesar de que la programación por metas resulta un potente instrumento de gran aplicabilidad e indudable éxito en la realidad, diferentes autores han apuntado algunas aparentes debilidades de los modelos de metas. Estas consideraciones han llevado a denominar *temas críticos en programación por metas* a anomalías aparentemente causadas por debilidades lógicas de la programación por metas, aunque en realidad se deben al uso insatisfactorio del enfoque. La mayoría se presentan en las metas lexicográficas. Algunas de ellas se exponen a continuación.

1. *Posible equivalencia de soluciones entre modelos de programación por metas y modelos de optimización de un solo criterio.*
   Es cierto, que, por ejemplo, en las metas lexicográficas si se fijan unos niveles muy pesimistas en los primeros niveles (fáciles de alcanzar) y muy optimistas en los últimos (difíciles de alcanzar), al resolverlo para los primeros niveles se obtendrá un valor 0 de las desviaciones, y puede llegar un momento en que para una meta no haya óptimos alternativos y, por lo tanto, fijar el valor de su desviación es ya dar una solución haciendo redundantes las metas de prioridades más bajas; de este modo, sería equivalente a fijar las metas de los niveles anteriores en su nivel de aspiración y optimizar la meta para la que no hay óptimos alternativos. Sin embargo, esta equivalencia se da por un mal planteamiento de los

niveles de aspiración. La equivalencia puede darse también en metas ponderadas, por ejemplo, si se plantean unos niveles de aspiración muy pesimistas para las metas, excepto para una en que resulte muy optimista, prácticamente inalcanzable. En tal caso, es cierto que el problema puede ser equivalente a optimizar ese atributo incluyendo las demás metas como restricciones. En cualquier caso, estos problemas se derivan de la formulación del modelo y no a debilidades lógicas de la metodología.

2. *Conclusiones equivocadas por agregar metas lexicográficas en una función objetivo*
   Cuando se plantea un modelo de programación por metas lexicográficas, suele haber una tendencia (casi natural) a intentar plantear un modelo equivalente que se resuelva en una sola iteración, sin tener que resolver un problema para cada nivel de prioridad. Así es común ver que se plantea una función objetivo como en el procedimiento de metas ponderadas donde se multiplica cada variable de desviación por un peso asignado a su nivel de prioridad (así para el primer nivel el peso es mucho mayor que para el segundo, etc.). En general, este planteamiento, además de ser lógicamente incorrecto, puede llevar a obtener soluciones que difieran mucho de las que se obtendrían con el modelo lexicográfico, y por lo tanto, si se intenta razonar sobre ellas como si fueran soluciones del modelo lexicográfico, a conclusiones claramente incorrectas.

3. *Problemas derivados de la omisión de una variable de desviación*
   Otros de los problemas que han surgido en la aplicación, o mejor dicho, en la incorrecta aplicación de la programación por metas, han sido los derivados por no incluir una variable de desviación. En ocasiones, se ha prescindido de la variable de desviación que no es considerada, por ejemplo, si se desea que un atributo sea superior a un nivel de aspiración, la variable no deseada es la de holgura al nivel de aspiración, n, sin embargo de la otra variable, la de exceso p, no se considera en el objetivo. Obsérvese que prescindir de ella implica que el atributo no pueda tomar valores superiores al nivel de aspiración, sólo inferiores (no deseados) o igual, lo que restringe el espacio de soluciones, eliminando del espacio de objetivos toda la región en que el atributo sea superior. Por lo tanto, la variable de desviación que no es la no deseada, también debe aparecer en el modelo o formular la meta como una desigualdad y no una igualdad. Ante el riesgo que puede presentar esta última formulación, se aconseja mantener ambas variables con la formulación lógica clásica de

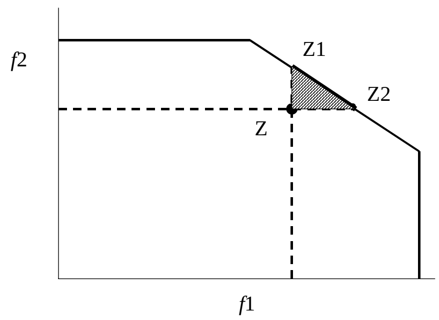
las metas, además de que, en general, no incluirlas no conlleva una mejora computacional (los métodos de resolución suelen añadir una variable en las desigualdades como primera medida).

4. *Problemas derivados de la inclusión de metas con dos lados innecesariamente*
Las metas con dos lados no deseados son menos habituales que las de un solo lado, ya que es raro que un decisor desee el logro exacto de una meta más que superar, o no hacerlo, un determinado nivel. Incluir entre las no deseadas una desviación que no lo es, puede llevar a obtener soluciones subóptimas. Es claro, que hay que tener un especial cuidado en identificar cuáles son las variables de desviación no deseadas.

5. *Incompatibilidad entre ordenaciones lexicográficas y la existencia de una función de utilidad*
Una de las críticas más fuertes al modelo lexicográfico ha sido su incompatibilidad con una función de utilidad del decisor. Esta incompatibilidad demostrada, que aquí no se niega, se deriva de la incompatibilidad con uno de los axiomas que se atribuye a una función de utilidad. Los axiomas que se supone que deben ser cumplidos por una función de utilidad son comparabilidad, reflexividad, transitividad y continuidad. De ellos, el que resulta incompatible con las ordenaciones lexicográficas es el de la continuidad. Según este axioma, los conjuntos de nivel de la función de utilidad son superficies continuas, es decir, dada una combinación de dos elecciones posibles de un decisor, siempre se podrá reducir la cantidad de una elección encontrando un incremento de la otra elección que compense exactamente la reducción. Es fácil comprobar que en las metas lexicográficas los conjuntos de nivel o superficies de indiferencia están formadas por un único punto (ver estos conjuntos como intersección del conjunto mejor y el peor respecto a un punto), por lo tanto, no es posible obtener el mismo valor con dos puntos distintos, lo que supone que no se cumple el axioma. Sin embargo, la continuidad de las preferencias dista mucho de ser un hecho, ni tan siquiera una hipótesis corroborada de forma empírica. Es tan sólo una hipótesis necesaria para axiomatizar la teoría neoclásica del consumo y asegurar la existencia de un equilibrio competitivo. Es más, hay situaciones en las que suponer válido este axioma puede ser un disparate; por ejemplo, supóngase un problema de planificación forestal donde se tienen en cuenta varios criterios, por ejemplo, uno económico que fuera la producción de madera y otro que fuera un índice que mida el riesgo de colapso ecológico del bosque. En este caso el supuesto de continuidad

diría que siempre existe un incremento en el volumen de madera producida que compense un incremento del riesgo de colapso del bosque, por alto que éste sea, lo que puede ser un auténtico disparate. Es obvio, que en este caso y en otros muchos, las preferencias no son continuas y por lo tanto no existe una función de utilidad para representarlas. Es decir, no es absolutamente necesario aceptar la continuidad de las preferencias para poder representar el problema de decisión.

6. *Posible ineficiencia paretiana de la solución obtenida por metas, y forma de resolverlo*
   La programación por metas no está pensada para obtener soluciones eficientes sino para obtener soluciones satisfacientes. En este sentido, es posible que la solución de un modelo de programación por metas no sea eficiente. Para ello, lo que tiene que pasar es que haya óptimos alternativos del problema de metas ponderadas o del último nivel de metas lexicográficos (esta condición es necesaria aunque no es suficiente). Para algunos autores es un gran inconveniente, pero no ha de olvidarse que el objetivo de la programación por metas, como ya se ha dicho, no es obtener soluciones eficientes sino satisfacientes. Para comprobar si una solución obtenida mediante programación por metas es eficiente, se fijan los valores de las variables de desviación no deseadas obtenidos, y se maximizan las variables opuestas; si la solución no cambia, es que la solución es eficiente, mientras que si varía, la nueva solución será una solución eficiente con los mismos valores de las variables no deseadas. Existe un test propuesto por Hannan (1980) que permite a partir de una solución obtenida por metas, obtener todas las soluciones eficientes que tienen el mismo valor de las variables de desviación no deseadas. Este test consiste en aplicar la técnicas multiobjetivo a un problema que sea el original pero incluyendo los valores de las variables de desviación (tanto las deseadas como las no deseadas) obtenidas previamente mediante programación por metas. Así si una meta es que x_1 sea al menos 5, y al resolverlo por metas se ha obtenido $n_1 = 0, p_1 = 1$, se formularía una restricción para el test de Hannan que fuera:
   $x_1 \geq 5 - n_1^* + p_1^* = 5 - 0 + 1 = 6$. Gráficamente, si Z es el punto obtenido por programación por metas, toda la zona rayada son puntos mejores, y Z1 y Z2 serían puntos eficientes mejores que Z y todas las combinaciones lineales convexas de ellos también:



De aquí se deriva un procedimiento para resolver modelos de programación por metas si se desea que además la solución sea eficiente:

1. Resolver el modelo de metas inicial. Si no hay óptimos alternativos la solución es eficiente, en otro caso ir al paso 2.
2. Si se desea una única solución eficiente ir a 3, si se desea explorar un conjunto de soluciones eficientes ir a 4.
3. Maximizar la suma de las variables desviacionales opuestas sin empeorar los valores alcanzados. La solución será eficiente
4. Transformar el modelo de metas en uno multiobjetivo con el procedimiento de Hannan para obtener todos los puntos eficientes del correspondiente modelo de metas.

7. *El concepto de meta redundante y repercusión en las metas lexicográficas*

El concepto de metas redundante puede surgir tanto en metas ponderadas como en lexicográficas, aunque con distinto sentido. Así en metas ponderadas puede surgir porque se plantee una meta inalcanzable y las demás de modo pesimista, con lo que el problema puede desviarse hacia la meta inalcanzable olvidando las demás. Sin embargo, donde es más relevante y claro este concepto es en las metas lexicográficas, ya que si en un determinado nivel de prioridad se llega a un único óptimo, todas las metas incluidas en niveles inferiores son un mero ornamento, ya que no pueden variar la solución. Se define como meta redundante aquella cuya omisión no influye en el resultado. La existencia de metas redundantes puede darse principalmente por tres causas:

1. Una excesiva priorización de las metas, es decir, una agrupación en un número excesivamente elevado de niveles de prioridad
2. Ser excesivamente optimista, fijando los niveles de aspiración muy próximos al ideal del atributo.
3. Incluir muchas metas con dos lados, obligando a la minimización de ambas variables de desviación.

Cuando se da la redundancia es interesante saber en qué nivel de prioridad se ha dado, y si parece oportuno, replantear el problema. El replanteamiento puede hacerse redefiniendo los niveles de aspiración de las metas anteriores o viendo si se han incluido metas de dos lados innecesariamente, o agrupando en distintos niveles (por ejemplo, se puede plantear un último nivel con la última meta no redundante ponderada para darle más importancia y las restantes metas, las que resultaron redundantes, con ponderación menor).

I.3.4 Métodos de decisión multicriterio discretos

Estos métodos se aplican cuando el conjunto de alternativas que se considera es discreto y es factible enumerar y tratar explícitamente cada uno de las alternativas posibles.

Existen distintos métodos para abordar estos problemas. En esta introducción se van a mostrar dos de ellos, aunque no son los únicos: el método ELECTRE y los procesos analíticos jerarquizados (AHP).

I.3.4.1 Procesos analíticos jerarquizados (método AHP)

Este método fue introducido por Saaty en 1977, y tuvo un gran impacto teórico y aplicado. Este método considera el problema dividido en 3 *niveles o jerarquías:*

Nivel 1: *Propósito* del problema

Nivel 2*: Criterios*

Nivel 3: *Alternativas*

Por ejemplo, si el problema es elegir el trazado de una carretera con tres posibles alternativas A, B, C, evaluadas por su coste, impacto medioambiental y tiempo de ejecución, los tres niveles serían:

Nivel 1: trazado de una carretera

Nivel 2*:* Coste, Impacto medioambiental, tiempo ejecución

Nivel 3: A, B, C

Una vez conceptualizada la estructura jerárquica del problema, se establece una fuerte interacción con el decisor en cada uno de los niveles para que emita su juicio de valor o preferencias. Esto supone hacer comparaciones por parejas de criterios y alternativas:

- Nivel 2:

La interacción con el decisor consiste en comparar por parejas los criterios. El procedimiento es el que se describió de Saaty en el punto 1 del método Electre: construye una matriz de comparación de criterios asignando un 1 si ambos son de la misma importancia, un 3 si hay una moderada importancia de un criterio respecto a otro, un 7 si hay una demostrada importancia y un 9 si hay extrema importancia. Con ello se forma una matriz cuadrada a_{ij} que valora la importancia del criterio i respecto al j. Si la importancia de un criterio respecto a otro es a_{ij}, a la inversa será $1/a_{ij}$. Obtenida esta matriz, se busca un vector de pesos para los criterios que sea solución del sistema $\frac{W_i}{W_j} = a_{ij}$, o lo que es lo mismo, $W_i - a_{ij}W_j = 0$ con la condición añadida de que sumen 1 para evitar la solución trivial de todos los pesos iguales a 0. Lamentablemente, ese sistema no suele tener solución dadas las normales inconsistencias del decisor y hay que buscar los que más se aproximen, por ejemplo mediante la programación por metas.

En el ejemplo del trazado de la autopista, supóngase que el centro decisor ha emitido sus juicios de valor obteniendo la siguiente matriz de comparaciones

	Coste	Impacto Medioambiental	Tiempo ejecución
Coste	1	2	5
Impacto Medioambiental	1/2	1	3
Tiempo ejecución	1/5	1/3	1

A partir de esta matriz se buscan los pesos preferenciales de los criterios resolviendo el siguiente problema donde se han introducido las variables de desviación para resolverlo:

$$\min \sum_{i=1}^{3} (n_i + p_i)$$
$$w_1 - 2w_2 + n_1 - p_1 = 0$$
$$w_1 - 5w_3 + n_2 - p_2 = 0$$
$$w_2 - 3w_3 + n_3 - p_3 = 0$$
$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

La solución obtenida es $(w_1, w_2, w_3) = (.588,.294,.118)$, siendo las variables de desviaciones $n_1 = p_1 = p_2 = n_2 = p_3 = 0, n_3 = 0.06$.

- Nivel 3:
  La interacción con el decisor en este nivel supone que el decisor emita sus juicios de valor cuando se comparan las alternativas por parejas para un determinado criterio. De esta forma se obtiene una tabla de comparaciones de alternativas para cada criterio. Estas comparaciones se valoran igual que en el caso anterior. Supongamos que para el ejemplo, se han obtenido las siguientes tres tablas:

	A	B	C

	A	B	C

	A	B	C

A	1	6	3	.	A	1	1/9	1/5	.	A	1	½	¼
B	1/6	1	½		B	9	1	2		B	2	1	½
C	1/3	2	1		C	5	½	1		C	4	2	1
	Coste					Imp. Medioamb.					Tiempo ejecuc.		

De nuevo se plantean sendos problemas de programación por metas para obtener unos pesos consistentes con las preferencias del decisor. En la tabla siguiente, se recogen estos pesos de las alternativas con cada criterio, donde se han puesto también en los criterios los pesos obtenidos en el nivel anterior:

Criterios / Alternativas	Coste 0.588	Impacto medioambiental 0.294	Tiempo ejecución 0.118
A	0.667	0.069	0.143
B	0.111	0.621	0.286
C	0.222	0.310	0.571

Por último, se obtienen los pesos globales de las alternativas para ambos niveles jerárquicos mediante una agregación multiplicativa, es decir, para cada alternativa se suman los productos de los pesos de ésta por el peso del criterio correspondiente. Así, para la alternativa A se obtendría 0.667x0.588+0.069x0.294+0.143x0.118=0.429. De esta forma se obtienen los pesos globales 0.429 para A, 0.282 para B y 0.289 para C. De este modo se obtiene una ordenación de las alternativas, resultando la A la preferida.

I.3.4.2 Método Electre

El **Método Electre** fue desarrollado por Benayoun, Roy y Sussman, en 1966. El método, básicamente, pretende reducir el tamaño del conjunto de soluciones eficientes, realizando una partición del conjunto eficiente en alternativas más favorables (*núcleo*) y menos favorables. Esta partición se lleva a cabo mediante una *relación de sobreclasificación* entre las alternativas. Una relación de sobreclasificación se basa en la siguiente relación entre alternativas:

Una alternativa E_i *sobreclasifica* (*outranks*) a otra E_k si para los atributos considerados el enunciado "la alternativa E_i es al menos tan buena como la alternativa E_k" es válido.

Esa definición de "al menos tan buena" en el método Electre se define a partir de la concordancia y discordancia entre alternativas:

- La *concordancia* de una alternativa E_i y otra E_k cuantifica hasta qué punto en un número alto de atributos E_i es preferida a E_k.
- La *discordancia* cuantifica hasta qué punto no hay atributo en que E_k es mucho mejor que E_i

Para que una alternativa *sobreclasifique* a otra y forme parte del *núcleo*, ha de superar un umbral mínimo de concordancia ($\overline{c}$)y no superar otro umbral de discordancia ($\overline{d}$).

Obsérvese que la sobreclasificación es distinta de la dominancia, en el sentido paretiano. Por otra parte, se trata de una relación que no tiene la propiedad de la transitividad, es decir, una alternativa puede sobreclasificar a otra y ésta a una tercera, y sin embargo, la primera no sobreclasificar a la tercera. Esta falta de transitividad se presenta como una ventaja ya que las razones por las que un centro decisor puede preferir la primera alternativa a la segunda y las que llevan a preferir la segunda a la tercera pueden ser muy diferentes y no llevar a que la primera sea preferida a la tercera.

El método Electre puede recogerse en el siguiente algoritmo.

Algoritmo Electre

1.- Formar la *matriz decisional* (E_i,A_j), es decir, una matriz donde las filas son las posibles elecciones y las columnas los atributos, siendo el "valor" de un elemento de la matriz el valor de ese atributo para esa elección.

Dar un *vector de pesos preferencial de los atributos* W, es decir, dar un vector que ordene la importancia de los criterios. La forma más sencilla de obtenerlo es pedirle al decisor que clasifique los criterios por orden de importancia, de modo que si hay n criterios, al más importante le asigne el valor 1 y al menos importante el valor n; a continuación, con el fin de que la suma de los pesos sea 1 se le asigna al criterio en posición j-ésima el peso $W_j = \dfrac{1/r_j}{\sum_{i=1}^{n} r_i}$ o el peso $W_j = \dfrac{n - r_j + 1}{\sum_{i=1}^{n} (n - r_i + 1)}$. El problema de este método es que no tiene en cuenta la diferencia de importancia entre criterios, es decir, cuánto más importante es uno que el siguientes. Para evitarlo Saaty propone otro método que consiste en comparar los criterios por parejas, de modo que se asigne un 1 si ambos son de la misma importancia, un 3 si hay una moderada importancia de un criterio respecto a otro, un 7 si hay una demostrada importancia y un 9 si hay extrema importancia. Con ello se forma una matriz cuadrada a_{ij} que valora la importancia del criterio i respecto al j. Si la importancia de un criterio respecto a otro es a_{ij}, a la inversa será $1/a_{ij}$. Obtenida esta matriz, se busca un vector de pesos para los criterios que sea solución del sistema $\frac{W_i}{W_j} = a_{ij}$. Lamentablemente, ese sistema no suele tener solución dadas las normales inconsistencias del decisor y hay que buscar los que más se aproximen.

Aunque no puede hablarse de cuál es el mejor método para estimar pesos preferenciales, siempre que la situación lo permita parecen tener más solidez los métodos propuestos por Saaty que los anteriores.

2.- Cálculo de la *matriz de índices de concordancia, $c(i,k)$:*
$c(i,k)$ = suma de los pesos de los atributos en que E_i es mejor que E_k
(en caso de empate en un atributo se suma la mitad del peso)

3.- *Normalización de la matriz decisional*: consiste en normalizar los criterios para evitar el posible efecto de trabajar con distintas unidades. Hay varios métodos para la normalización: dividir los valores por el mejor que haya en ese criterio, o dividir por el rango o recorrido del criterio, o restar al mejor valor del criterio el de esa alternativa y dividir después por el rango (con este procedimiento los valores quedan entre 0 y 1, siendo 0 el mejor y 1 el peor).

4.- Cálculo de la *matriz de decisión normalizada y ponderada*: Multiplicar cada columna (atributo) de la matriz de decisión por el peso preferencial correspondiente a ese atributo.

5.- Cálculo de la *matriz de índices de discordancia, $d(i,k)$:*
$d(i,k)$ = diferencia mayor entre los criterios en que E_i es dominada por E_k dividida entre la diferencia mayor en valor absoluto entre los valores de un criterio cualquiera.

6.- Fijar un *umbral mínimo de concordancia,* $\overline{c}$, y un umbral máximo de discordancia, $\overline{d}$.

7.- Calcular la *matriz de dominancia concordante*: poner un 1 si el índice de concordancia es mayor que el umbral, un 0 si no.

8.- Calcular la *matriz de dominancia discordante*: poner un 1 si el índice de discordancia es menor que el umbral, un 0 si no.

9.- Calcular la *matriz de dominancia agregada*: multiplicar términos homólogos de las matrices de dominancia concordante y discordante. Así si un elemento de esa matriz es 1 es porque la alternativa de esa fila es mejor que la de la columna en un número de importante de criterios y no es claramente peor en ningún criterio. Si hay un 0 es que o bien no es mejor en un número importante de criterios o es claramente peor en algún criterio o ambas.

10.- Obtener el ***núcleo***: se eliminan las alternativas que están sobreclasificadas por alguna otra, es decir, las que tienen al menos un 1 en su columna en la matriz de dominancia agregada. Si se representa en un grafo en los nodos las alternativas y en los arcos las sobreclasificaciones (el origen es la alternativa que sobreclasifica a otra que es el destino), el núcleo será único si este grafo no tiene circuitos.

Obsérvese que según se fijen los umbrales de concordancia y discordancia el resultado será distinto.

Por ejemplo, sea el problema es elegir el trazado de una carretera con cinco posibles alternativas A, B, C, D y E, evaluadas por su coste, impacto medioambiental y tiempo de ejecución, arrojando los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} & \text{Coste(cien millones€)} & \text{Medioambiental (u. más alto peor)} & \text{Tiempo ejec(a.)} \\ A & 1 & 8 & 1 \\ B & 2 & 6 & 2 \\ C & 2.5 & 7 & 1.5 \\ D & 3 & 4 & 2 \\ E & 4 & 2 & 2.5 \end{bmatrix}$$

El proceso sería el siguiente:

1.- Formar la *matriz decisional* (matriz anterior), y dar un *vector de pesos preferencial de los atributos* W: mediante el método descrito por Saaty y utilizando programación por metas, una posible tabla de comparaciones sería

	Coste	Impacto Medioambiental	Tiempo ejecución
Coste	1	2	5
Impacto Medioambiental	1/2	1	3
Tiempo ejecución	1/5	1/3	1

A partir de esta matriz se buscan los pesos preferenciales de los criterios resolviendo el siguiente problema donde se han introducido las variables de desviación para resolverlo:

$$\min \sum_{i=1}^{3} (n_i + p_i)$$
$$w_1 - 2w_2 + n_1 - p_1 = 0$$
$$w_1 - 5w_3 + n_2 - p_2 = 0$$
$$w_2 - 3w_3 + n_3 - p_3 = 0$$
$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

La solución obtenida es $(w_1, w_2, w_3) = (.588,.294,.118)$, siendo las variables de desviaciones $n_1 = p_1 = p_2 = n_2 = p_3 = 0, n_3 = 0.06$.

2.- Cálculo de la *matriz de índices de concordancia, c(i,k):*

$c(i,k)$ = suma de los pesos de los atributos en que E_i es mejor que E_k
(en caso de empate en un atributo se suma la mitad del peso)

$$\left[\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & - & .71 & .71 & .71 & .71 \\ B & .29 & - & .88 & .65 & .71 \\ C & .29 & .12 & - & .71 & .71 \\ D & .29 & .35 & .29 & - & .71 \\ E & .29 & .29 & .29 & .29 & - \end{array}\right]$$

3.- *Normalización de la matriz decisional*: se selecciona que el rango sea 0 a 1, y que 0 sea siempre el peor valor.

4.- Cálculo de la *matriz de decisión normalizada y ponderada*: Multiplicar cada columna (atributo) de la matriz de decisión por el peso preferencial correspondiente a ese atributo.

$$\left[\begin{array}{cccc} & \text{C.} & \text{E.} & \text{I.} \\ A & 0 & .29 & 0 \\ B & .19 & .19 & .08 \\ C & .29 & .24 & .04 \\ D & .39 & .10 & .08 \\ E & .59 & 0 & .12 \end{array}\right]$$

5.- Cálculo de la *matriz de índices de discordancia, d(i,k):*

$d(i,k)$ = diferencia mayor entre los criterios en que E_i es dominada por E_k dividida entre la diferencia mayor en valor absoluto entre los valores de un criterio.

$$\left[\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & - & 0.16 & .08 & .33 & .5 \\ B & .33 & - & .07 & .16 & .33 \\ C & .5 & .16 & - & .25 & .42 \\ D & .66 & .33 & .16 & - & .16 \\ E & 1 & .66 & .5 & .33 & - \end{array}\right]$$

6.- Fijar un *umbral mínimo de concordancia,* $\overline{c} = 0.7$, y un umbral máximo de discordancia, $\overline{d} = 0.2$.

7.- Calcular la *matriz de dominancia concordante*: poner un 1 si el índice de concordancia es mayor que el umbral, un 0 si no.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

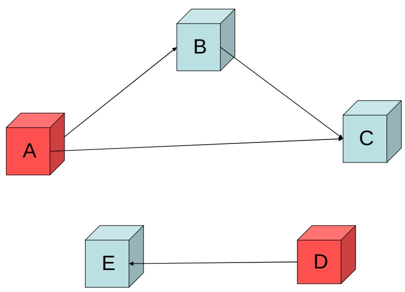
8.- Calcular la *matriz de dominancia discordante*: poner un 1 si el índice de discordancia es menor que el umbral, un 0 si no.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

9.- Calcular la *matriz de dominancia agregada*: multiplicar términos homólogos de las matrices de dominancia concordante y discordante.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

10.- Obtener el núcleo: es único y está formado por las alternativas A y D. Según el grafo:



I.4 Teoría de juegos o juegos de estrategia

La primera publicación que ha habido acerca de teoría de juegos es la publicación Von Neumann, Morgenstenn (1944) "Theory of games and economic behaviour". No es casualidad ni la fecha ni el título ya que las dos situaciones de conflicto más claras que puede haber cuando varios decisores han de tomar sus respectivas decisiones, son las guerras y la economía.

Esto es así porque una situación en la que el proceso de decisión se plantea como una situación de teoría de juegos, es una situación de conflicto en la que existe una mayor o menor oposición en los intereses de los decisores (jugadores) y la consecución de los mismos no depende en exclusiva de las decisiones propias y si acaso del azar, sino que al mismo tiempo dependen de las decisiones que los demás tomen en la búsqueda de sus propios intereses.

Los elementos que intervienen en un juego son, además de los jugadores, los siguientes:

- *Las estrategias de los jugadores:* para cada jugador se tiene el conjunto de estrategias
- *Los pagos de los jugadores:* cada jugador tiene una función que determina el pago que recibe el jugador cuando cada uno de ellos adopta una de sus posibles estrategias. A diferencia de lo que ocurre en la teoría de la decisión, aquí siempre se presupone y se habla suponiendo que los pagos son ganancias.

Vamos a ver la formulación de un juego con dos jugadores con estos elementos, conocida como ***forma normal de un juego***:

- X : conjunto de estrategias de J_1
  Y : conjunto de estrategias de J_2
- Pagos o utilidades de los pares de estrategias para los jugadores:
  $M_1 : X \times Y \to \mathbb{R}$
  $(x,y) \to M_1(x,y)$ función de pagos (pagos que recibe) del jugador J_1
  $M_2 : X \times Y \to \mathbb{R}$
  $(x,y) \to M_2(x,y)$ función de pagos (pagos que recibe) del jugador J_2

Cuando el juego es de dos jugadores y los conjuntos de estrategias son finitos es posible representar ambas funciones mediante una bimatriz denominada bimatriz de pagos, de modo que las filas representan las estrategias del primer jugador y las columnas las del segundo:

$$\begin{pmatrix} (a_{11,}b_{11}) & \cdots & (a_{1n,}b_{1n}) \\ \vdots & (a_{ij,}b_{ij}) & \vdots \\ (a_{m1,}b_{m1}) & \cdots & (a_{mn,}b_{mn}) \end{pmatrix}$$

siendo a_{ij} el pago que recibe el primer jugador si él opta por su estrategia i-ésima y el segundo jugador por la j-ésima, y b_{ij} el pago que recibe el segundo jugador si eligen ambos esas mismas estrategias.

I.4.1 Clasificación de los juegos

Los juegos pueden clasificarse atendiendo a distintos criterios:

- *Por el número de jugadores*: Los juegos pueden ser **bipersonales o N-personales**. No es trivial la diferencia, ya que hay determinadas opciones que pueden darse en los juegos con más de dos jugadores que no pueden darse sólo con dos, como las coaliciones.
- *Por el número de estrategias de los jugadores*: pueden ser juegos **finitos** si los conjuntos de estrategias son finitos o **infinitos**.
- *Por su evolución en el tiempo:* pueden ser juegos **estáticos** o **dinámicos**, entendiéndose por juego dinámico aquél en el que en el transcurso del juego existe una ganancia de información por parte de algún jugador.
- *Por la relación de intercambio información entre jugadores:* los juegos pueden ser **cooperativos,** que quiere decir que los jugadores intercambian información y pueden colaborar, no que tengan intereses comunes, o juegos **no cooperativos**.
- *Por la variación de "riqueza" del conjunto de jugadores*: pueden ser juegos de **suma no constante**, que quiere decir que en el propio juego se genera o pierde riqueza del conjunto, o de **suma constante**, que supone que hay una cantidad que repartir y el problema es cómo se hará ese reparto. Un caso particular de este último tipo de juegos son los juegos de suma nula, en los que la riqueza del conjunto es cero, y por tanto toda la ganancia de un jugador es pérdida del otro.
- *Por la cantidad de información de que disponen los jugadores*: pueden ser juegos con **información completa**, es decir, la función de ganancias de cada jugador es conocida por todos los jugadores, o juegos con **información incompleta**, en cuyo caso un jugador al menos no conoce las ganancias de otro jugador. Por ejemplo, en una subasta cuando un jugador no sabe lo que el otro está dispuesto a pagar por el bien subastado
- *Por la cantidad de información que adquieren durante el juego*: en juegos dinámicos o repetidos, se dice que el juego es de **información perfecta** si

en cada momento el jugador que tiene que decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento. En otro caso, se dice que es un juego con **información imperfecta**.

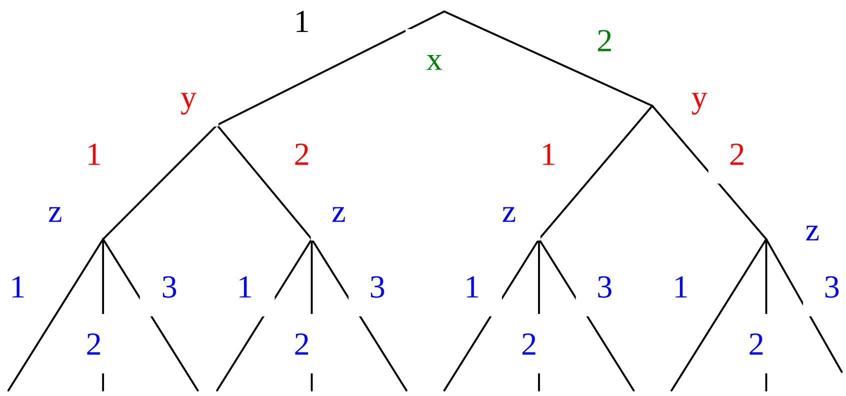
A continuación, vamos a ver algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos:

Ejemplo 1: Un juego dinámico, bipersonal, finito, no cooperativo, con información completa pero imperfecta.

Este juego se plantea por pasos:

1) J_1 escribe un número $x \in \{1,2\}$ en un papel sin que nadie lo vea
2) El azar elige (mediante un procedimiento que se asegura que es aleatorio y con tal distribución) un número $y \in \{1,2\}$ con probabilidades ¾ y ¼, respectivamente.
3) J_2 elige un número $z \in \{1,2,3\}$ conociendo y pero no x
4) Se tienen los pagos $h_1(x,y,z)$ y $h_2(x,y,z)$

Este tipo de juegos por etapas se suele representar mediante un árbol o lo que se llama ***forma extensiva de un juego***, que es la forma más habitual de representar un juego dinámico.



Este juego es dinámico porque hay una ganancia de información, si el segundo jugador no conociera el resultado del azar, seguiría siendo estático aunque pueda parecer lo contrario. En este juego obsérvese que dada la información que tiene el segundo jugador, por ejemplo y=1 y z=1, él no puede saber si se encuentra en el primer nodo de la izquierda o en el séptimo. A estos conjuntos que son indistinguibles para un jugador se les denomina *conjuntos de información.*

Ejemplo 2: Juego finito, estático, bipersonal, no cooperat., suma constante y con información completa

Supóngase una batalla en la que existen dos posiciones en juego, la A y la B. El jugador 1 defiende ambas posiciones con 3 divisiones, mientras que el jugador

2 ataca con 5 divisiones. En caso de igualdad de divisiones en alguna de las posiciones, gana la posición el jugador que defiende. Las estrategias de los jugadores es el número de divisiones que envía cada uno a cada posición, y los pagos serán el número de posiciones ganadas. Así la bimatriz de pagos puede plantearse como sigue:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} (0,5) & (1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & (5,0) \end{array} \\ \begin{array}{c} (0,3) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (3,0) \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,2) & (1,1) & (1,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,1) & (0,2) & (1,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) & (0,2) & (1,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) & (1,1) & (0,2) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 3: Dilema del prisionero. Juego bipersonal, no cooperativo, estático y con información completa.

Dos delincuentes que han cometido un delito conjuntamente son detenidos e incomunicados. Si ambos se delatan cumplirán los dos una condena de 5 años; si uno delata al otro, pero el compañero no lo hace, el delatado cumplirá 20 años y el delator nada; si ninguno se delata, cumplirán 1 año cada uno.

La bimatriz de pagos en este caso, y cambiando el signo para que se desee maximizar estos pagos sería la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & J_2 \\ & & \begin{array}{cc} D & ND \end{array} \\ J_1 & \begin{array}{c} D \\ ND \end{array} & \begin{pmatrix} (-5,-5) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Este problema es uno de los más relevantes de la teoría de juegos, ya que la situación puede aplicarse en muy diversos contextos, en particular es especialmente aplicable en economía y empresa, y ha dado lugar a una gran cantidad de estudios que además permiten ver claramente la diferencia entre juegos cooperativos y no cooperativos, como se verá a continuación.

I.4.2 Juegos no cooperativos, con información completa y estáticos.

I.4.2.1 Concepto de solución

Una vez planteado un problema de teoría de juegos, lo primero que hay que hacer es definir el concepto de solución. Está claro que se entenderá por solución un par de estrategias que optimicen los pagos de cada jugador. Si existiera un par cuyos pagos fueran los mejores posibles tanto para un jugador como para otro evidentemente esta sería la solución, pero, es que en tal caso no habría conflicto.

El concepto de solución dependerá del tipo de juego con el que se trabaje, y más concretamente, de si hay cooperación o no. En cualquier caso, habrá de ser un concepto que represente el comportamiento racional de los jugadores.

Para el caso no cooperativo, este concepto es el de *estrategias en equilibrio* o *punto de equilibrio* o *punto de silla* debido a Nash. Para el caso de dos jugadores (es inmediato extrapolarlo al caso N-personal) (x^*, y^*) es un par de estrategias en equilibrio si y sólo si $\begin{cases} M_1(x^*, y^*) \geq M_1(x, y^*) & \forall x \in X \\ M_2(x^*, y^*) \geq M_1(x^*, y) & \forall y \in Y \end{cases}$; es decir, es un par de estrategias para el cuál ningún jugador está interesado en cambiar de estrategia unilateralmente.

Por ejemplo, en el caso del dilema del prisionero, el único par de estrategias que hay en equilibrio es el par (D, D), es decir, que ambos se delatan. Es la solución no sólo porque matemáticamente sea el único par que cumple las condiciones, sino que por el propio razonamiento es la solución a la que llegarían movidos únicamente por su propio interés. Veamos este razonamiento analizando por parte de los jugadores las posibilidades que tienen. El jugador 1 observa que puede no delatar a su compañero, y si hace eso el jugador 2 buscando su propio interés lo que le conviene es delatar al jugador 1. Entonces el jugador 1 observa que si el otro le va a delatar, a él le conviene delatar al jugador 2. Este mismo razonamiento es válido para el jugador 2 ya que es un juego cuyos pagos son simétricos.

Sin embargo, es evidente que este problema tiene una solución que proporciona mejores pagos para ambos jugadores, que es la solución (ND, ND), es decir, que no se delatan, pero es una solución que no está en equilibrio porque cualquiera de ellos observa que si el otro mantiene esa estrategia a él le va mejor cambiar. Para poder optar al par de estrategias de no delatarse tendrían que llegar a algún acuerdo, es decir, intercambiar información, lo que haría del juego un juego cooperativo. En estos juegos, los cooperativos, el concepto de solución pasa por las coaliciones, de modo que una coalición se reparte el beneficio conjunto obtenido, pudiendo incluso llegar a alguna solución del tipo (ND, D) o viceversa, si ello favorece a ambos (obviamente para el dilema del prisionero en el contexto planteado no sería una alternativa, pero sí si son consecuencias de tipo económico)[2]. La cooperación permite llegar a una solución que sea eficiente

[2] La gran diferencia de la cooperación es que permite que la solución sea una solución óptima en el sentido de Pareto.

en el sentido de Pareto, es decir, no dominada, lo cuál no puede ser asegurado en el caso en que no haya cooperación.

El concepto de solución de las estrategias en equilibrio no siempre da solución a un juego no cooperativo. Fundamentalmente, la dificultad viene de que pueden existir más de un par de estrategias en equilibrio. Así si sólo existe un par de estrategias en equilibrio o existen más de uno pero con los mismos pagos, la solución existe (esa única o cualquiera de las que tengan esos mismos pagos). Sin embargo, si existe más de un par en equilibrio y los pagos son diferentes, no existe solución del juego en esas condiciones. Veamos un ejemplo sin solución que también se considera un clásico dentro de la teoría de juegos, y planteado con las mismas estrategias con las que surgió (hoy en día probablemente son otras las más comunes). El juego es denominado la batalla de los sexos: un matrimonio desea salir una noche juntos; él quiere ir al boxeo y ella al ballet; hay un conflicto pues sobre todo desean ir juntos, así que plantean las utilidades para ellos de las posibles combinaciones formando la siguiente matriz de pagos

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Mujer} \\ & & \begin{array}{cc} \textit{Boxeo} & \textit{Ballet} \end{array} \\ \textit{Hombre} & \begin{array}{c} \textit{Boxeo} \\ \textit{Ballet} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Es claro que en este planteamiento hay dos pares de estrategias en equilibrio que son (*Boxeo, Boxeo*) y (*Ballet, Ballet*), pero cuyos pagos (2,1) y (1,2) son diferentes, luego el problema matemáticamente no tiene solución. En esa situación para resolver el juego, se puede llegar a un acuerdo si el juego se repite varias veces, lo cuál exige la cooperación, o puede tener solución si aparece un líder, con lo que la solución sería aquel par de estrategias en equilibrio que proporcione mejor pago al líder.

Otro juego para el que no existe solución en este sentido es, por ejemplo, el juego de pares y nones. Para este juego la bimatriz de pagos sería:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & N \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

para el que resulta inmediato comprobar que no existe ningún par de estrategias en equilibrio.

Una posibilidad ante juegos de este tipo es ampliar el concepto de solución, definiendo lo que se denominan estrategias mixtas en un juego.

Una *estrategia mixta* x para J_1 es una distribución de probabilidad sobre sus estrategias originales, denominadas puras, es decir, es $x = (x_1,..,x_m)$ tal que

$0 \leq x_i$ y $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Así el elemento x_i se interpreta como la probabilidad de que J_1 elija su i-ésima estrategia.

Análogamente, una estrategia mixta y para J_2 es una distribución de probabilidad sobre sus estrategias puras, es decir, es $y = (y_1, .., y_n)$ tal que $0 \leq y_j$ y $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Así el elemento y_j se interpreta como la probabilidad de que J_2 elija su j-ésima estrategia.

Obsérvese que las estrategias puras no son más que un caso particular de las estrategias mixtas, el caso degenerado (probabilidad 1 para una de las estrategias y 0 para el resto).

En cualquier juego en el que a cada jugador le convenga adivinar la jugada del otro y que el otro no adivine la suya, no existe ningún equilibrio de Nash como el considerado anteriormente, porque el juego incluye necesariamente un elemento de incertidumbre sobre lo que harán los jugadores (por ejemplo, el juego de pares y nones, el póker, etc).

Dado este nuevo concepto de estrategia hay que establecer el pago asociado a un par de estrategias de estas características, siendo éste el *pago esperado.* Dado un par de estrategias mixtas (x, y), el pago esperado por J_1 para este par de estrategias es $E_{J1}[x, y] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ y para J_2 sería $E_{J2}[x, y] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$.

Para el siguiente ejemplo es inmediato ver que no existe un par de estrategias puras en equilibrio,

$$\begin{pmatrix} (2,-2) & (4,-4) & (3,-3) \\ (7,-7) & (2,-2) & (5,-5) \end{pmatrix}$$

y sean el par de estrategias mixtas $x = (1/4, 3/4)$ e $y = (1/5, 2/5, 2/5)$. El pago esperado del primer jugador para este par de estrategias será

$$E_{J1}[x, y] = 2\frac{1}{4}\frac{1}{5} + 4\frac{1}{4}\frac{2}{5} + 3\frac{1}{4}\frac{2}{5} + 7\frac{3}{4}\frac{1}{5} + 2\frac{3}{4}\frac{2}{5} + 5\frac{3}{4}\frac{2}{5} = 3'95,$$

y para el segundo jugador será su opuesto

Con este nuevo concepto de estrategias y de pago esperado, se redefine el concepto de solución, de modo que x^* e y^* son *estrategias en equilibrio de Nash u óptimas* para J_1 y J_2, si

$$\begin{cases} v_1(x^*, y^*) = E_{J1}\left[x^*, y^*\right] \geq E_{J1}\left[x, y^*\right] = v_1(x, y^*) & \forall x \in X \\ v_2(x^*, y^*) = E_{J2}\left[x^*, y^*\right] \geq E_{J2}\left[x^*, y\right] = v_2(x^*, y) & \forall y \in Y \end{cases},$$

es decir, ningún jugador está interesado en cambiar unilateralmente de estrategia.

Obsérvese que se le ha dado el nombre de estrategias óptimas además del de estrategias en equilibrio; esto se debe al siguiente resultado enunciado por Nash en 1950:
Teorema (Nash, 1950): En todo juego con un número finito de jugadores y cada uno con un número finito de estrategias, existe al menos un equilibrio de Nash, que posiblemente incluye estrategias mixtas.

El equilibrio de Nash en estrategias mixtas se interpreta más que en términos de elegir aleatoriamente una estrategia siguiendo estas probabilidades, como una representación de la incertidumbre del jugador i respecto a la decisión del jugador j sobre la estrategia (pura) que va a seguir. Es una conjetura sobre lo que hará el otro jugador con la información de que se dispone (es posible que el otro jugador actúe luego basándose en algún criterio no conocido).

Por último, en esta sección vamos a hablar de un tipo de estrategias que por su naturaleza nunca formarán parte de un equilibrio de Nash: las estrategias dominadas.

Se dice que una estrategia pura es una *estrategia dominada* si existe una combinación lineal convexa de las otras estrategias (una estrategia mixta) que proporciona mejores pagos. Así a efectos de búsqueda de la solución las estrategias dominadas pueden eliminarse.

Veamos en el ejemplo una secuencia de eliminación de estrategias dominadas:

$\begin{pmatrix} (2,-2) & (-1,1) & (0,0) \\ (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix}$ en esta matriz la primera estrategia de J_1 está dominada pues la segunda fila (o la tercera) proporciona mejores pagos al jugador, luego a efectos de solución podemos eliminarla siendo la matriz de pagos resultante la siguiente $\begin{pmatrix} (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix}$. En esta matriz las estrategias segunda y tercera del jugador 2 están dominadas por la primera luego también pueden descartarse resultando la matriz $\begin{pmatrix} (3,-3) \\ (2,-2) \end{pmatrix}$, y aquí la última estrategia del jugador 1 está dominada por la anterior, con lo que después de haber eliminado las estrategias dominadas nos quedamos sólo con la matriz $\big((3,-3)\big)$ correspondiente a la segunda estrategia de J_1 y a la primera de J_2, que es la solución del juego. De forma esquemática el proceso ha sido el siguiente

$$
\begin{pmatrix} (2,-2) & (-1,1) & (0,0) \\ (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow D. \\ \rightarrow \\ \end{matrix} \begin{array}{c} \begin{matrix} & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} (3,-3) \\ (2,-2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (3,-3) \end{pmatrix}
$$

A modo de observación, comentar que no siempre es posible obtener la solución mediante la eliminación de estrategias dominadas, es un procedimiento para reducir las dimensiones del problema más que para resolver el problema.

Por otra parte, como se ha comentado, el procedimiento de resolución que se ha visto tampoco asegura que pueda encontrar siempre solución, pues ésta puede no existir, como en el juego de pares y nones. Sin embargo, se puede asegurar que si la eliminación iterativa de estrategias dominadas elimina todas las estrategias excepto un par, este para constituye el único equilibrio de Nash en el juego. Alternativamente, también se puede asegurar que si un par de estrategias forman un equilibrio de Nash sobreviven a la eliminación iterativa de estrategias dominadas.

I.4.2.2 Un caso particular: Juegos de suma constante o juegos matriciales

Los juegos de suma constante son juegos en los que intervienen dos jugadores y no existe ganancia de riqueza en el proceso, es decir, existe una cantidad que ha de ser repartida entre ambos jugadores. Si el juego es de suma nula quiere decir, además, que la cantidad a repartir es cero, esto es, que lo que gane un jugador lo paga directamente el otro jugador.

Es evidente que en este tipo de juegos todo lo que gane un jugador es pérdida del otro, por lo que por su propia naturaleza son juegos no cooperativos. De este tipo es el segundo ejemplo visto, el ejemplo acerca de una batalla.

En lo que sigue se hablará fundamentalmente de juegos de suma nula a no ser que se especifique lo contrario, pero todo lo que se presenta es aplicable para cualquier caso de suma constante.

En un juego de suma nula hay que tener en cuenta que la matriz de los pagos de un jugador es la opuesta a la del otro jugador. Así si la matriz de pagos del jugador 1 es $M_1 = M$, entonces la matriz de pagos del jugador 2 será $M_2 = -M$ (si la suma no es nula sino que es c, la matriz del segundo jugador será $C - M$, donde C es una matriz con todos los elementos iguales a c). Por lo tanto, para describir un juego de suma nula basta con dar una de las matrices, de ahí que también reciban el nombre de juegos matriciales. Por convenio, siempre se considerará que se da la matriz del primer jugador, ya que los papeles de los jugadores son absolutamente intercambiables.

La formulación general de un juego de suma nula G será $G = (X, Y, M)$, donde X es el conjunto de estrategias del jugador 1, Y es el conjunto de estrategias del jugador 2, y $\begin{array}{c} M : X \times Y \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to M(x,y) \end{array}$ es la matriz de pagos del jugador 1.

En los juegos de suma nula cada jugador debe esperar lo peor del otro (lo mejor para el otro jugador), con lo que la forma de buscar estrategias en equilibrio para este problema es mediante el criterio pesimista, que será un criterio maxi-min para el jugador 1 (para cada estrategia propia, fila de la matriz, busca el mínimo y selecciona la que dé mayor valor mínimo) y un criterio mini-max para el jugador 2 (para cada estrategia propia, columna de la matriz, busca el máximo ya que es lo peor para él, y selecciona la que dé el mínimo de esos valores). Si los valores obtenidos por la estrategia maximin del primer jugador y la minimax del segundo coinciden, el par de estrategias está en equilibrio, y a ese valor coincidente se le llama *valor del juego*, que es el pago que recibirá el primer jugador con ese par de estrategias.

Como ejemplo sea la siguiente matriz de pagos de un juego de suma nula, donde al final de cada fila se ha escrito el mínimo de ella, y al final de cada columna el máximo. Es decir, si el jugador J_1 elige su primera estrategia, debe esperar lo peor del jugador J_2, es decir, J_2 elegirá su segunda estrategia proporcionando al primer jugador un pago de –1. Y así sucesivamente.

$$\begin{array}{ccc} & J_2 & \\ J_1 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 5 \end{array} & \end{array}$$

Obtenidos los mínimos de la filas, evidentemente J_1 elige su segunda estrategia que es la que le da mayor pago (3), y análogamente, J_2 elige su primera estrategia que es la que da menor pago a J_1 y por lo tanto mayor para sí mismo. Como ambos valores coinciden existe solución que es el par de estrategias (2,1) y el valor del juego es $v = 3$, es decir, el primer jugador recibe 3 unidades y el segundo –3.

Un análisis previo de las estrategias de los jugadores puede reducir las posibles estrategias en equilibrio, mediante la eliminación iterativa de estrategias dominadas, tal y como se vio en la sección anterior. Se dice que una estrategia es una *estrategia dominada* si existe una combinación lineal convexa de las otras estrategias que proporciona mejores pagos. Así a efectos de búsqueda de la solución las estrategias dominadas pueden eliminarse. De forma esquemática, se podría haber llegado a la solución siguiendo el siguiente proceso:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\to \textit{Domi.}\\ \to \\ \end{matrix}\quad \begin{array}{c} \begin{matrix} & \downarrow & \downarrow\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 2\end{pmatrix}\end{array} \to \begin{pmatrix}3 & & \\ 2 & & \end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \to D.\end{matrix} \to \begin{pmatrix}3 & & \end{pmatrix}$$

En general, si existe un par de estrategias puras en equilibrio con este procedimiento se puede llegar a la solución, pero no siempre existe ese par. Así pues, se suele utilizar fundamentalmente para reducir dimensiones antes de buscar estrategias mixtas, una vez que se ha visto que no hay estrategias puras en equilibrio.

I.4.2.2.1 Las estrategias mixtas en un juego de suma nula

Como ya se comentó en el caso general, una *estrategia mixta* x para J_1 es una distribución de probabilidad sobre sus estrategias originales, denominadas puras, es decir, es $x = (x_1,..,x_m)$ tal que $0 \le x_i$ y $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Así el elemento x_i se interpreta como la probabilidad de que J_1 elija su i-ésima estrategia.

Análogamente, una estrategia mixta y para J_2 es una distribución de probabilidad sobre sus estrategias puras, es decir, es $y = (y_1,..,y_n)$ tal que $0 \le y_j$ y $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Así el elemento y_j se interpreta como la probabilidad de que J_2 elija su j-ésima estrategia.

Dado un par de estrategias mixtas (x,y), el pago esperado por J_1 para este par de estrategias es $E[x,y] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_i y_j$.

Con este nuevo concepto de estrategias y de pago esperado, en el caso de juegos de suman nula, se dice que x^* e y^* son *estrategias óptimas* para J_1 y J_2, si $E\left[x,y^*\right] \le E\left[x^*,y^*\right] \le E\left[x^*,y\right] \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$, siendo $v = E\left[x^*,y^*\right]$ el valor del juego.

Para poder resolver un juego de suma nula, queda únicamente dar un procedimiento para poder obtener esas estrategias óptimas. Ese procedimiento no es más que la programación lineal, es decir, formular el problema mediante programación lineal.

Vamos a deducir cuál sería el problema de programación lineal que plantearía el primer jugador.

Suponga que J_1 elige una estrategia mixta $x = (x_1,...,x_m)^t$, y denotemos a las columnas de la matriz M por $(m_1,...,m_n)$.

Si J_2 elige su estrategia j-ésima, el pago esperado del jugador J_1 sería $m_j^t x = \sum_{i=1}^{m} m_{ij}x_i$.

Como J_1 debe esperar lo peor de su contrario, debe esperar que J_2 elija aquella estrategia que minimice ese valor esperado y con ello el valor del juego, es decir, se tendrá que $v = \min_{j=1,\ldots n} \left\{ m_j^t x \right\}$.

Por otra parte, para J_1 el problema que se le plantea es como maximizar ese valor, o sea, su problema es $\max v \quad / \quad v = \min_{j=1,\ldots n} \left\{ m_j^t x \right\}$.

Sin embargo, este problema así planteado no es un problema de programación lineal, pero puede plantearse de forma equivalente mediante la formulación siguiente que ya sí es de programación lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & v \\ s.a. & v \leq m_j^t x \quad j = 1,\ldots,n \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x_1,\ldots,x_m \geq 0 \end{array}\right\}$$

Análogamente, planteamos el problema para el jugador J_2, de modo que si $y = (y_1,\ldots,y_n)^t$, y $\begin{pmatrix} m_1{}' \\ \vdots \\ m_m{}' \end{pmatrix}$ representan las filas de la matriz M, el problema de programación lineal del jugador J_2 es el siguiente

$$\left.\begin{array}{ll} \min & w \\ s.a. & w \geq m_i{}' y \quad i = 1,\ldots,m \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y_1,\ldots,y_n \geq 0 \end{array}\right\}$$

Matricialmente, estos dos problemas se plantean como:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & v \\ s.a. & M^t x \geq v \\ & \mathbf{1}x = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}\right\} J_1 \text{ y } \left.\begin{array}{ll} \min & w \\ s.a. & My \leq w \\ & \mathbf{1}y = 1 \\ & y \geq 0 \end{array}\right\} J_2$$

Es inmediato comprobar que ambos problemas son problemas duales (a excepción de un cambio de signo en las variables), y por las propiedades de la dualidad, se tiene que $v = w$ [3]. Al ser problemas duales, basta con resolver uno de ellos y obtener la solución del otro a partir de las variables duales.

Así pues, el procedimiento a seguir para resolver un juego de suma nula debe ser el siguiente:

1. Buscar estrategias puras en equilibrio con las estrategias minimax y maximin. Si existe solución, terminar.
2. Buscar estrategias mixtas óptimas planteando el problema de programación lineal de uno de los jugadores, y dar como solución la solución de este problema para ese jugador y la solución del dual para el otro.

Obsérvese que en cualquier momento del proceso se puede reducir las dimensiones del problema eliminando estrategias dominadas. Por su sencillez, no se suele hacer antes del primer paso, pero si es necesario plantear el problema de programación lineal en un paso previo se suelen eliminar para que el problema sea de dimensiones menores.

Para ilustrar el procedimiento resolvamos el siguiente problema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Es claro que no hay estrategias puras en equilibrio, ya que para el jugador 1 los mínimos son 2 y 2, y para el jugador 2 los máximos son 7, 4, y 5. Como no coinciden máximo de (2,2) y mínimo de (7,4,5), no hay estrategias puras en equilibrio.
2) Formulamos uno de los problemas de programación lineal, o el del jugador 1

$$\left.\begin{array}{ll} \max & v \\ s.a. & 2x_1 + 7x_2 \geq v \\ & 4x_1 + 2x_2 \geq v \\ & 3x_1 + 5x_2 \geq v \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

o bien, el del jugador 2

[3] La primera vez en la historia que se planteó el problema dual en programación lineal fue en el contexto de la teoría de juegos, como el problema del otro jugador. Posteriormente, se derivó de la programación no lineal, obteniendo las propiedades que tiene el problema dual.

$$\left.\begin{array}{ll}\min & w \\ s.a. & 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \le w \\ & 7y_1 + 2y_2 + 5y_3 \le w \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0\end{array}\right\}$$

Si por ejemplo resolvemos este último problema, la solución óptima obtenida es $y_1 = 2/7, y_2 = 5/7, y_3 = 0$, siendo $w = v = 24/7$, y las variables duales son $(-5/7, -2/7)$, de donde se deduce que la estrategia óptima del primer jugador es $x_1 = 5/7 \quad x_2 = 2/7$.

I.4.2.3 Aplicaciones de juegos no cooperativos, con información completa y estáticos

I.4.2.3.1 Modelo de duopolio de Cournot (1838)

El planteamiento de este juego es el de dos empresas que compiten en un mercado por un cierto producto homogéneo, es decir, el producto final no se diferencia por cuál de las dos empresas sea la productora. El precio del producto es elástico, de modo que cambia con la oferta total del artículo (a mayor oferta, menor precio). Cada empresa tiene a su vez un coste de producción del artículo. Por último, las empresas no pueden cooperar, es decir, no se puede considerar que puedan pactar la cantidad a producir cada una de ellas, y el proceso se realiza sólo una vez.

En esta situación es claro que la estrategia de cada una de las empresas es la cantidad a producir. Para ver un ejemplo concreto, supóngase que q_i es la cantidad que produce la empresa i, $Q = q_1 + q_2$ es la oferta total del artículo, que la elasticidad del precio se formula como $P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q > a \end{cases}$, y que el coste de producción es el mismo para ambas empresas y es proporcional a la cantidad producida (no hay costes fijos) siendo constante el marginal, es decir, $C(q_i) = cq_i$, con $c < a$.

Para este planteamiento, el espacio de estrategias de cada empresa es $X_i = [0, \infty)$ ya que $q_i \ge 0$. Por otra parte, las funciones de pagos son de la forma $\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(q_i + q_j) - c] = q_i[a - (q_i + q_j) - c]$, donde i denota a la propia empresa de la que expresamos su margen de contribución, y j a la otra empresa.

Para encontrar el punto de equilibrio, se han de resolver los dos problemas $\max\limits_{q_i \ge 0} \pi_i(q_i, q_j^*) = \max\limits_{q_i \ge 0} q_i[a - (q_i + q_j^*) - c]$, donde la estrategia del otro jugador ha de ser considerada como un parámetro. Derivando e igualando a 0 para obtener el máximo, se obtiene $\frac{\partial \pi_i(q_i, q_j^*)}{\partial q_i} = a - 2q_i - q_j^* - c = 0 \Rightarrow q_i^* = \frac{1}{2}(a - q_j^* - c)$, que resolviendo el sistema de ecuaciones con las dos ecuaciones obtenidas (una para cada empresa) da como punto de equilibrio $q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3}$. La cantidad total producida sería $Q = \frac{2}{3}(a-c)$ y el precio $P(Q) = a - \frac{2}{3}(a-c) = \frac{a+2c}{3}$.

Obsérvese que si las empresas pudieran cooperar y actuar como un monopolio, la cantidad de monopolio se obtiene de $\max_{Q \geq 0} \pi(Q) = \max_{Q \geq 0} Q[a - Q - c]$, cuya solución óptima es $Q^* = \frac{a-c}{2}$, que es una cantidad menor que la obtenida en el duopolio, y por lo tanto, resulta en un precio mayor, que sería $P(Q) = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}$. ¿Por qué las empresas no optan por producir $\frac{a-c}{4}$? Porque este valor no está en equilibrio, es decir, cualquiera de ellas prefiere moverse de ese valor y obtener un poco más de beneficio. Es decir, para que las empresas siguiesen esta política tiene que existir un pacto explícito entre ellas de cooperar para no desviarse, sin embargo, la solución de equilibrio obtenida antes, es el punto en el que a ninguna empresa le interesa aumentar su producción dada la bajada de precio que supondría.

Es importante apreciar el sentido de esta comparación, ya que existen leyes antimonopolio, y en gran parte de los mercados existen tribunales de la competencia que vigilan que las estrategias seleccionadas por los jugadores apunten a la solución del duopolio (u oligopolios cuando son más de dos pero no demasiadas) y no a la del monopolio, que supondrían pactos ilegales entre empresas.

I.4.2.3.2 Modelo de duopolio de Bertrand (1883)

En este caso el planteamiento es muy similar al anterior, pero se supone que las empresas producen artículos diferenciados, y pueden elegir el precio al que los venden. Lo que es elástico en este planteamiento es la demanda, de modo que la demanda de un producto sea menor cuánto mayor sea el precio de éste y menor sea el del otro producto, es decir, pueda haber una sustitución en algún sentido de un producto por otro.

Para ilustrar lo que ocurre en este caso, sea la demanda del producto i de la forma $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$, donde b denota hasta qué punto una empresa es sustituta de la otra. Supóngase que el coste de producción es proporcional a la cantidad producida (no costes fijos), constante y el mismo para ambas empresas, c. El espacio de estrategias en este caso es de nuevo $X_i = [0, \infty)$, ya que los precios han de ser mayores o iguales que 0. En este caso, si consideramos como funciones de pagos los márgenes de contribución, tenemos $\pi_i(p_i,p_j)=q_i(p_i,p_j)[p_i-c]=(a-p_i+bp_j)(p_i-c)$, y por lo tanto, para encontrar el punto de equilibrio habrá que resolver los problemas $\max\limits_{p_i\geq 0}\pi_i(p_i,p_j^*)=\max\limits_{p_i\geq 0}(a-p_i+bp_j^*)(p_i-c)$. Derivando en cada uno de ellos respecto a la variable que puede controlar, e igualando a 0, se tiene $\dfrac{\partial\pi_i(p_i,p_j^*)}{\partial p_i}=-p_i+c+a-p_i+bp_j^*=0\Rightarrow p_i^*=\dfrac{1}{2}(a+bp_j^*+c)$; y resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, el resultado final para el punto de equilibrio resulta ser $p_1^*=p_2^*=\dfrac{a+c}{2-b}\quad(b<2)$.

I.4.2.3.3 Arbitraje de oferta final. Modelo de Farber (1980)

Este modelo fue desarrollado para una situación de negociación salarial. Esta situación se plantea como que existe una oferta de salario por parte de la empresa y otra por parte del sindicato. Para llegar a una solución, resulta habitual nombrar a un árbitro, aunque las reglas del arbitraje pueden variar, de modo que en el sistema convencional el árbitro elige cualquier valor, mientras que en un arbitraje de oferta final como el que aquí se plantea el árbitro ha de elegir una de las dos ofertas.

Se puede suponer que el árbitro, si está bien elegido, tendrá un valor que sería el deseado por él, pero que es desconocido tanto por la empresa como por el sindicato, y que de las dos ofertas elegirá aquella que sea más cercana a ese valor. Por otra parte, aunque el valor deseado por el árbitro sea desconocido, supondremos que es conocida para ambas partes la distribución de probabilidad de ese valor.

Para concretar, sea w_e la oferta de la empresa, w_s la oferta del sindicato (obviamente, será $w_e<w_s$), y x el valor deseado por el árbitro, que tiene función de densidad $f(x)$ y de distribución $F(x)$.

En estas condiciones, la probabilidad de que la oferta de la empresa sea elegida es $P(w_e \text{ sea elegida})=P(x<\dfrac{w_e+w_s}{2})=F(\dfrac{w_e+w_s}{2})$, y la de que lo sea la oferta del sindicato $P(w_s$ sea elegida)=1-$F(\dfrac{w_e+w_s}{2})$.

Así pues, el problema que se plantea la empresa es determinar su oferta para minimizar el salario esperado, es decir, $\min\limits_{w_e} w_eF(\dfrac{w_e+w_s^*}{2})+w_s^*\left[1-F(\dfrac{w_e+w_s^*}{2})\right]$, mientras que el sindicato quiere maximizarlo, es decir, su objetivo es $\max\limits_{w_e} w_e^*F(\dfrac{w_e^*+w_s}{2})+w_s\left[1-F(\dfrac{w_e^*+w_s}{2})\right]$. Derivando e igualando a 0 en ambos problemas, se obtienen las ecuaciones $(w_s^*-w_e^*)\dfrac{1}{2}f(\dfrac{w_e^*+w_s^*}{2})=F(\dfrac{w_e^*+w_s^*}{2})$ y

$(w_s^* - w_e^*)\frac{1}{2}f(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}) = 1 - F(\frac{w_e^* + w_s^*}{2})$. Resolviendo este sistema, se llega a que el punto medio entre ambas ofertas ha de ser la mediana de la distribución, es decir, $F(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}) = 1/2$, y la distancia entre las dos ofertas $w_s^* - w_e^* = 1/f(\frac{w_e^* + w_s^*}{2})$. Por ejemplo, si la distribución del valor deseado por el árbitro fuera una normal de media μ y desviación típica σ, dado que la media y mediana coinciden por ser simétrica, se tiene $\frac{w_e + w_s}{2} = \mu$ y $\frac{w_s - w_e}{2} = \sqrt{2\pi\sigma^2}$, de donde se obtendría $w_e^* = \mu - \sqrt{2\pi\sigma^2}$ y $w_s^* = \mu + \sqrt{2\pi\sigma^2}$.

I.4.2.3.4 Los ejidos

Al menos desde Hume (1739) filósofos políticos y economistas han observado que si los ciudadanos responden exclusivamente a incentivos privados, habrá un déficit en la provisión de bienes públicos y los recursos comunes estarán sobreutilizados. Veamos un ejemplo teórico pero que viene a ilustrar esta idea.

Sea una aldea de N habitantes, que se dedican al cuidado de cabras y comparten un ejido en el que pastan sus cabras. Sea g_i el número de cabras que posee el i-ésimo habitante, siendo el total de cabras $G = \sum_i g_i$. Sea c el coste de comprar y cuidar una cabra, independiente del número de cabras que se posean, y sea $v(G)$ el valor unitario de una cabra cuando hay G cabras en el ejido. Esta función de valor ha de cumplir ciertas condiciones; una es que hay un número máximo de cabras que pueden pastar en el ejido, $G_{\max}$, de modo que a partir de él la función de valor será 0; otra condición es que cuántas más cabras haya, menor será el valor unitario de éstas pues las condiciones empeoran, de modo que para $G < G_{\max}$ será $v'(G) < 0$; y, por último, el decrecimiento del valor será más acentuado cuanto mayor sea el número de cabras, es decir, si hay pocas cabras añadir una no hace que disminuya mucho el valor, pero cuando ya hay muchas y está a punto de saturarse ese efecto será más fuerte; para expresar este comportamiento se pedirá $v''(G) < 0$.

Supóngase que los habitantes deciden simultáneamente cuántas cabras tener. El espacio de estrategias de cada habitante será $X_i = [0, \infty)$, o también valdría, $X_i = [0, G_{\max})$. La ganancia de cada habitante por tener g_i cabras cuando las que tienen los demás suman $g_{-i} = g_1 + ... + g_{i-1} + g_{i+1} + ... + g_n$, será $g_i v(g_i + g_{-i}) - cg_i$, de modo que el problema que se plantea cada habitante si responde a incentivos personales exclusivamente, será $\max_{g_i \geq 0} g_i v(g_i + g_{-i}^*) - cg_i$. Derivando e igualando a cero para obtener las condiciones de primer orden, se tiene $v(g_i + g_{-i}^*) + g_i v'(g_i + g_{-i}^*) - c = 0$. Si se suman todas estas condiciones sustituyendo previamente g_i por g_i^*, y se divide por N, se obtiene la expresión $v(G^*) + \frac{1}{N} G^* v'(G^*) - c = 0$, donde $G^* = \sum_i g_i^*$.

Ahora calcúlese cuál sería el óptimo social, es decir, el número óptimo de cabras total que maximiza el beneficio global. El problema que habría que resolver es $\max_{G \geq 0} Gv(G) - cG$. La condición de primer orden que ha de cumplir el óptimo G^* se obtiene derivando e igualando a cero, $v(G^{**}) + G^{**} v'(G^{**}) - c = 0$. Comparando con la condición anterior, se tiene que $G^* > G^{**}$, y por lo tanto, que actuando en común el número de cabras sería menor, con mayor valor de cada una de ellas y un uso más racional del bien público, que no cree déficit y que lo aproveche mejor.

La demostración de que $G^* > G^{**}$, se puede hacer por reducción al absurdo. Supóngase que $G^* \leq G^{**}$. Entonces $v(G^*) \geq v(G^{**})$ por ser decreciente, y $0 > v'(G^*) \geq v'(G^{**})$ por tener segunda derivada negativa. Además se tendría que $\frac{G^*}{N} < G^{**}$. Tomando el término de la izquierda de la primera expresión y sustituyendo se tiene la cadena de desigualdades

$$0 = v(G^*) + \frac{1}{N} G^* v'(G^*) - c \geq v(G^{**}) + \frac{1}{N} G^* v'(G^*) - c > v(G^{**}) + \frac{1}{N} G^{**} v'(G^{**}) - c = 0$$

con lo que queda demostrado el absurdo de la hipótesis inicial.

I.4.3 Juegos no cooperativos, con información completa y dinámicos

Este tipo de juegos responde al planteamiento de un juego en el que no se considera cooperación entre los jugadores (no hay posibilidad de acuerdos entre los jugadores, bien porque no sea posible obtener mediante acuerdos nada mejor que actuando individualmente o bien porque esté prohibido hacerlo), la información es completa, es decir, las funciones de pagos de los jugadores son conocidas por todos, y es dinámico, es decir, hay ganancia de información, o lo que es lo mismo, existe al menos un jugador que al decidir tiene más información que si tuviera que decidir al principio del juego, y por lo tanto, su decisión vendrá condicionada por el resultado de esa información previa. El concepto de racionalidad de los jugadores resulta tan importante o más que en juego estático en este tipo de juegos, ya que, como veremos, el concepto de solución difiere en cierto sentido del concepto en juegos estáticos, pasando por considerar o no las amenazas no creíbles.

Antes de ver cuál es el concepto de solución en este tipo de juegos, vamos a ver una representación de los juegos alternativa a la forma normal: la forma extensiva. Lo primero que hay que tener en cuenta es que cualquier juego se puede expresar en forma normal o en forma extensiva.

Al representar la forma normal de un juego, hay que precisar:

1) Los jugadores
2) Las estrategias posibles de cada jugador, donde se entiende por estrategia un plan de acción completo
3) La ganancia recibida por cada jugador para cualquier combinación posible de jugadas

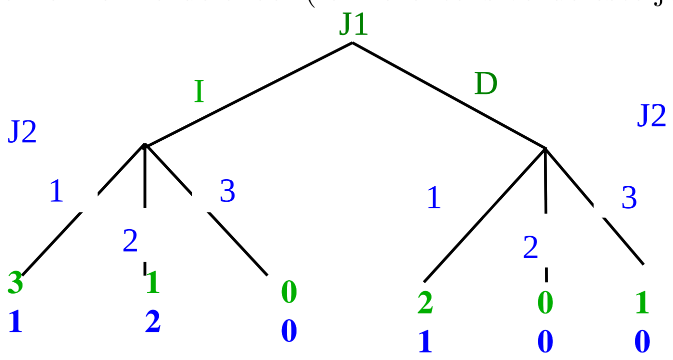
Sin embargo, los elementos que se han de precisar cuando se describe un juego en forma extensiva siguen otra secuencia:

1) Los jugadores
2) A) Cuándo tiene que jugar cada jugador
   B) Lo que cada jugador puede hacer cuando tiene oportunidad de jugar
   C) Lo que el jugador sabe cuando tiene oportunidad de jugar
3) La ganancia recibida por cada jugador para cualquier combinación posible de jugadas

Esta forma extensiva, se puede representar en forma de árbol, si bien, la representación de lo que sabe cada jugador para verlo en forma de árbol requiere de un concepto más, que veremos con posterioridad. En general, para juegos dinámicos, resulta mucho más apropiada la representación en forma extensiva que la representación en forma normal. Veamos un ejemplo. Sea un juego en que el jugador 1 elige una de las acciones del conjunto {I,D}. A continuación, el jugador 2 una vez que ha observado lo que ha elegido el jugador 1, elige entre una de 3 acciones {1,2,3}. Los pagos que se tienen se reflejan en la siguiente tabla, donde las filas representan las estrategias del jugador 1 y las columnas las del jugador 2, y los pagos, primero del jugador 1 y luego del jugador 2:

	1	2	3
I	(3,1)	(1,2)	(0,0)
D	(2,1)	(0,0)	(1,0)

La representación en forma de árbol (forma extensiva de este juego) sería:



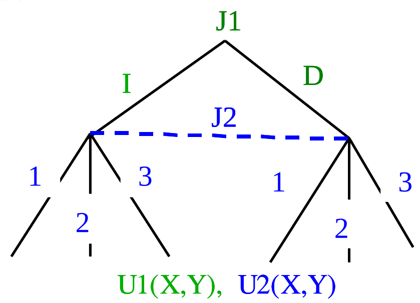
Si este mismo juego se quiere representar en forma normal, hay que tener en cuenta que una estrategia del jugador 2 ha de ser un plan de acción completo, es decir, ha de incluir la respuesta a las dos opciones del jugador 1. De esta forma la bimatriz sería:

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
I	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
D	(2,1)	(0,0)	(1,0)	(2,1)	(0,0)	(1,0)	(2,1)	(0,0)	(1,0)

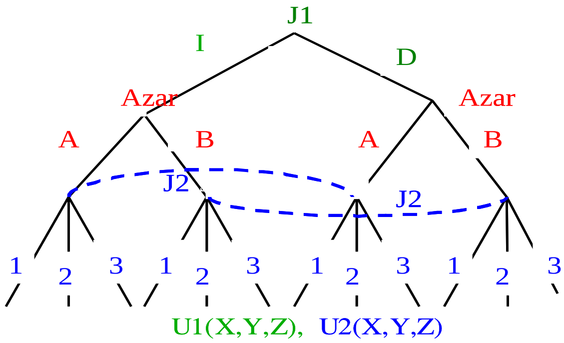
El concepto que falta para que el árbol represente el juego es la representación de la información disponible cuando a un jugador le toca jugar. Se define como *conjunto de información* a un conjunto de nodos de decisión de un jugador que satisface las siguientes condiciones:

- Al jugador le corresponde jugar en cada nodo del conjunto
- Cuando en el transcurso del juego el jugador llega a un nodo del conjunto, el jugador al que le toca no sabe a qué nodo del conjunto ha llegado.

Generalmente, los conjuntos de información se representan uniendo mediante líneas discontinuas los nodos de un mismo conjunto. En el ejemplo anterior, dado que cuando juega el jugador 1 sólo hay un nodo, ése es su único conjunto de información. Para el jugador 2, dado que conoce la elección del jugador 1 hay dos conjuntos de información diferenciados que son sus dos nodos de juego. Si el juego no fuera dinámico, y por tanto no hubiera ganancia de información, la representación extensiva sería la misma, pero el jugador 2 no sabría en qué nodo está, de modo que el árbol sería:



Para el ejemplo 1 de la sección I.4.1, ene l que un jugador escribe en un papel I o D, a continuación actúa el azar con dos posibles opciones, A o B, y después juega el jugador 2 eligiendo un elemento del conjunto {1,2,3}, conociendo el resultado del azar pero no la estrategia del jugador 1, la forma extensiva o árbol sería:



A partir de estas definiciones, se define el concepto de información perfecta. Un juego es de *información perfecta* si en cada jugada el jugador conoce toda la historia del juego hasta ese momento. En términos de conjuntos de información, y suponiendo información completa, un juego es de información perfecta si cada conjunto de información tiene un único elemento. Así, el ejemplo con que ha empezado esta sección es un ejemplo de información perfecta, mientras que si suponemos que el jugador 2 no conoce la estrategia del jugador 1, sería de información imperfecta. También el juego que acabamos de ver sería de información imperfecta, pues aunque conoce el resultado del azar no conoce la estrategia del primer jugador.

I.4.3.1 Concepto de solución: equilibrio de Nash perfecto en subjuegos

La idea de concepto de solución en los juegos dinámicos difiere en cierto modo de la idea vista en el caso estático. El concepto de solución es el de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, pero para ver su definición, primero hemos de entender qué es un subjuego.

Un *subjuego* en un juego representado en forma extensiva es un subconjunto de nodos con las siguientes propiedades:

a) Empieza en un nodo n que sea un conjunto de información con un único elemento, y que no sea el primero del árbol.
b) Incluye a todos los nodos de decisión que siguen a n en el árbol
c) No interseca a ningún conjunto de información, es decir, si un nodo está en el subjuego lo están todos los de su conjunto de información.

Un subjuego se puede analizar por sí mismo y obtener resultados relevantes para el juego completo. En el primer ejemplo de esta sección, existen dos subjuegos, el que empieza en un nodo de decisión del jugador 2 y el que empieza en el otro nodo del jugador 2, ya que son de conjuntos de información distinta. Sin embargo, si el jugador 2 no conociera la estrategia elegida por el jugador 1, no existirían subjuegos, ya que ambos nodos serían del mismo conjunto de información y deberían estar en el mismo subjuego, pero el único nodo por el que podría empezar el subjuego sería el primero, que no es posible por definición.

La siguiente definición es debida a Selten (1965). Un *equilibrio de Nash es perfecto en subjuegos* si las estrategias de los jugadores constituyen un equilibrio de Nash en cada subjuego. Éste será el concepto de equilibrio manejado para este tipo de juegos. Además se puede asegurar, que si el juego es finito y con información completa, existe al menos un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, aunque pueda ser con estrategias mixtas.

La pregunta que surge de forma inmediata es por qué hay que manejar este concepto de solución y no el que se vio para juegos estáticos. La respuesta es que el concepto de equilibrio de Nash nos daría las estrategias en equilibrio, pero incluyendo también amenazas no creíbles y respuestas a amenazas no creíbles. Veamos el primer ejemplo que se ha considerado. La bimatriz de pagos ya se ha mostrado, pero se muestra ahora marcando en negrita las estrategias en equilibrio:

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
I	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(1,2)	**(1,2)**	**(1,2)**	(0,0)	(0,0)	(0,0)
D	(2,1)	(0,0)	(1,0)	**(2,1)**	(0,0)	(1,0)	**(2,1)**	(0,0)	(1,0)

Cómo puede observarse, entre estas soluciones hay amenazas no creíbles. Los pares de estrategias {I,(2,2)}, {I,(2,3)} y {D,(3,1)} no son soluciones reales para jugadores racionales. Por ejemplo, la estrategia {D,(3,1)} incluye una amenaza no creíble, ya que viene a decir que si el jugador 1 juega D (que es su estrategia) le responderá con 1 que es lo lógico, pero si juega I le responderá con 3, que sería un comportamiento no racional o amenaza no creíble (sería ganar 0 pudiendo ganar 2). Ese par de estrategias no son solución del subjuego que comienza en el nodo del jugador 2 una vez que el jugador 1 ha elegido D, es decir, no forman un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

I.4.3.2 Cálculo de la solución con información perfecta y finitas etapas: inducción hacia atrás.

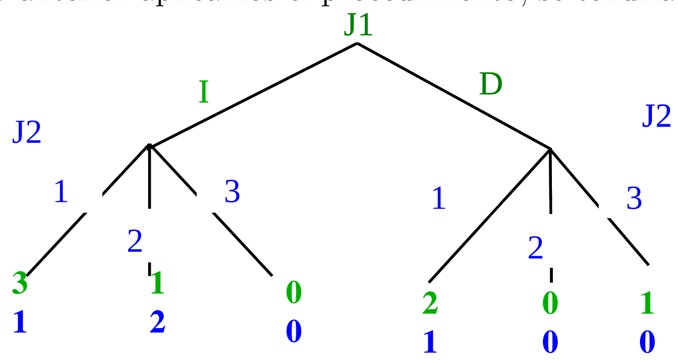
El siguiente paso es, una vez que sabemos qué queremos obtener como solución, tener un procedimiento para encontrarla. Un método relativamente sencillo es el *método de inducción hacia atrás.* Sea un juego dinámico no cooperativo con información completa. Además para poder aplicar la metodología que se va a ver, ha de suponerse que el juego es de información perfecta y con finitas etapas. La metodología sería:

1) Calcular para el último jugador la función de mejor respuesta en cada nodo de decisión previo, es decir, en cada nodo dar cuál sería la mejor respuesta del jugador al que le toca jugar. Si suponemos dos jugadores y a_1 la estrategia del jugador 1, y a_2 la estrategia del jugador 2, definimos

como función de mejor respuesta del jugador 2 a $R_2(a_1) = a_2^*$, tal que $u_2(a_1, a_2^*) = \max_{a_2} u_2(a_1, a_2)$.

2) Repetir este proceso para los sucesivos nodos hasta el primero, sabiendo la respuesta en los posteriores, es decir, hasta resolver en el primer nodo $\max_{a_1} u_1(a_1, R_2(a_1)) = u_1(a_1^*, R_2(a_1^*))$.

Si en el ejemplo anterior aplicamos el procedimiento, se tendría:



1) $R_2(I) = 2 \quad R_2(D) = 1$
2) $\max\{u(I, R_2(I)), u(D, R_2(D)\} = \{1,2\} = 2$ que se alcanza eligiendo D, y la mejor respuesta del jugador 2 a D es 1.

Hay que observar que el equilibrio perfecto en subjuegos no es lo mismo que la solución obtenida mediante inducción hacia atrás. La inducción hacia atrás proporciona un resultado, no una estrategia en sí misma para el segundo jugador, ya que no es un plan de acción completo. Es decir, el resultado $(a_1^*, R_2(a_1^*)) = (D,1)$ es el resultado de la inducción hacia atrás, mientras que el equilibrio perfecto en subjuegos ha de incluir la mejor respuesta del jugador 2 a cualquier estrategia del jugador 1, es decir, sería $(a_1^*, R_2(a_1)) = (D,(2,1))$, o lo que es lo mismo, en la posición de la estrategia del segundo jugador ha de ir toda la función de mejor respuesta obtenida en el primer paso de la inducción hacia atrás, de modo que aunque el jugador 1 no actuara racionalmente se tendría la mejor respuesta a cualquiera de sus estrategias.

I.4.3.3 Aplicaciones con información perfecta

I.4.3.3.1 Modelo de duopolio de Stackelberg (1934)

Considérese el mismo planteamiento del modelo de duopolio de Cournot, pero, de modo que las dos empresas no eligen a la vez sus estrategias, sino una después de la otra y conociendo la estrategia elegida por la primera. Esta situación es muy habitual cuando no son ofertas simultáneas, sino que una empresa toma de cisiones de expansión, o de inversión, o de desarrollo, de modo que la segunda empresa actúa en respuesta a la decisión de la primera. En muchos casos, la primera es una empresa líder, y la segunda una empresa con menos poder de mercado.

Pueden ser más empresas, pero para concretar el ejemplo, supongamos que son dos y que sus estrategias son la elección de la cantidad de producción. El precio unitario de venta, al igual que en el duopolio de Cournot, se considera que varía con las cantidades producidas según $P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q > a \end{cases}$, y el coste unitario de producción se considera constante, c. El planteamiento en forma extensiva sería:

1. La empresa 1 elige $q_1 \geq 0$
2. La empresa 2 observa q_1 y elige $q_2 \geq 0$
3. Cada empresa recibe $\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(q_i + q_j) - c] = q_i[a - (q_i + q_j) - c]$

Resolvamos mediante inducción hacia atrás cuál sería la solución de este juego.

Empresa 2: para una estrategia de la empresa 1 se plantea $\max\limits_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_1, q_2) = \max\limits_{q_2 \geq 0} q_2[a - q_1 - q_2 - c]$. Que derivando e igualando a 0, resulta la función de mejor respuesta $R_2(q_1) = \dfrac{a - q_1 - c}{2}$ (si $q_1 < a - c$).

Empresa 1: sabiendo la mejor respuesta de la empresa 2 (la sabe puesto que la información es completa, es decir, conoce los costes y beneficios de la otra empresa y puede razonar igual que ella), el problema que se plantea es $\max\limits_{q_1 \geq 0} \pi_1(q_1, R_2(q_1)) = \max\limits_{q_1 \geq 0} q_1[a - q_1 - R_2(q_1) - c] = \max\limits_{q_1 \geq 0} q_1 \dfrac{a - q_1 - c}{2}$, cuya solución (derivando e igualando a cero), es $q_1^* = \dfrac{a - c}{2} \Rightarrow q_2^* = \dfrac{a - c}{4}$.

Como puede observarse, la cantidad total producida es $\dfrac{3}{4}(a - c)$, que es mayor que la cantidad en equilibrio de Cournot ($\dfrac{2}{3}(a - c)$, con lo que el precio del producto será menor. Por otra parte, obsérvese que la cantidad que ha de producir la primera empresa es la de monopolio, mientras que la segunda es la mitad; es decir, sale mejor parada la empresa que actúa primero. Es curioso observar cómo disponer de más información a la hora de actuar no implica obtener una solución mejor, ya que la primera empresa sabe que cuando actúe la segunda tendrá esa información. Esta particularidad hace que sea muy distinto el enfoque desde la teoría de juegos que desde la teoría de la decisión clásica, en la que disponer de más información siempre lleva a mejorar la posible solución, mientras que aquí disponer de más información a la hora de actuar lleva a una peor solución si la primera empresa sabe que vas a disponer de ella. La conclusión es que la empresa que toma la iniciativa, es la que obtiene mayores beneficios.

I.4.3.3.2 Negociación secuencial en 2 periodos

Supóngase que dos jugadores, J_1 y J_2, se han de repartir un euro, negociando secuencialmente durante a lo sumo 3 periodos. Sea r la tasa de interés por periodo, y por tanto, sea $\delta = \dfrac{1}{1+r}$ la tasa de descuento por periodo, es decir, δs es el valor futuro que tendrá una cantidad s, o sea, el valor en el próximo periodo de esa cantidad actual.

La negociación se plantea en los siguientes términos:

1. Primer periodo: J_1 ofrece quedarse una fracción s_1 de euro; J_2 puede aceptar la oferta o rechazarla.
2. Segundo periodo: J_2 ofrece que J_1 se quede una fracción s_2 de euro; J_1 puede aceptar la oferta o rechazarla.
3. Tercer periodo: J_1 recibe una fracción s de euro, y J_2 recibe $1-s$.

Resolvamos este juego mediante inducción hacia atrás:

Periodo 2º: J_1 aceptará la oferta del otro jugador, s_2 , siempre que se cumpla que $s_2 \geq \delta s$ (valor futuro de la ganancia asegurada en el tercer periodo). J_2 gana $1-s_2$ si J_1 acepta, o $\delta(1-s)$ si no acepta, de modo que si le ofrece $s_2 = \delta s$ ganará $1-\delta s$, mientras que si le ofrece menos ganará $\delta(1-s)$, que es peor. Luego la respuesta óptima si se llega a esa etapa será que J_2 ofrezca $s_2^* = \delta s$ y que J_1 acepte.

Periodo 1º: J_2 aceptará la oferta de J_1 de llevarse $1-s_1$ si $1-s_1 \geq \delta(1-s_2^*)$, es decir, si $s_1 \leq 1-\delta(1-s_2^*)$. Si J_1 ofrece $s_1 = 1-\delta(1-s_2^*) = 1-\delta(1-\delta s)$ ganará esa cantidad, mientras que si hace una oferta mayor ganará $\delta s_2^* = \delta\delta s$. Como $1-\delta(1-\delta s) = 1-\delta+\delta\delta s > \delta\delta s$, J_1 ofrecerá $s_1^* = 1-\delta(1-\delta s)$ en el primer periodo, y J_2 aceptará.

I.4.3.3.3 Negociación secuencial en infinitos periodos

Supóngase el mismo planteamiento que el anterior, pero, sin un periodo final, de modo que no existe una cantidad final s, sino que el juego se repite indefinidamente hasta que un jugador acepta una oferta del otro jugador. Supóngase que el jugador J_1 juega en las etapas impares, y el jugador J_2 juega en las pares.

En este caso no es posible aplicar la inducción hacia atrás ya que no hay una etapa final. Sin embargo, obsérvese que el juego que comienza en la etapa 3 es el mismo juego que el que empieza en la etapa 1. Sea s la cantidad, a determinar, que será solución del juego que empieza en la etapa 3. A partir de la resolución del juego del ejemplo anterior, se sabe que la solución es que J_1 ofrezca $s_1^* = 1-\delta(1-\delta s)$. Sin embargo, como el juego que empieza en la etapa 3 es el mismo que el que empieza en la etapa 1, ambas soluciones han de ser iguales, es decir, $s = 1-\delta(1-\delta s) = 1-\delta+\delta^2 s$; agrupando términos se tiene

$s=\dfrac{1-\delta}{1-\delta^2}=\dfrac{1}{1+\delta}$. Es decir, en la etapa primera, J_1 ofrecerá $s^*=\dfrac{1}{1+\delta}$, y J_2 aceptará, recibiendo $1-s^*=\dfrac{\delta}{1+\delta}$.

I.4.3.4 Juegos con información imperfecta: decisiones simultáneas en una etapa

La información imperfecta supone que al menos un jugador cuando tiene que jugar no conoce todo el desarrollo previo del juego. Un caso claro es cuando un jugador elige una estrategia, y a continuación, lo hace el segundo jugador, pero sin conocer la decisión del primero. Esta situación se puede modelar de la misma forma que si los jugadores deciden de forma simultánea, de modo que la selección de estrategias por parte de los jugadores en esa etapa es como resolver un juego estático. De hecho la forma de resolver este juego es mediante inducción hacia atrás, pero en las etapas con decisión simultánea (o asimilables a tales) resolviendo el juego estático asociado.

Por ejemplo, sea el siguiente juego en forma extensiva:

1. J_1 y J_2 escogen simultáneamente sus acciones (a_1, a_2)
2. J_3 y J_4 observan (a_1, a_2) y eligen simultáneamente sus acciones (a_3, a_4).
3. Los jugadores reciben las ganancias $u_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $i = 1,2,3,4$

Para resolver el juego en cada etapa se ha de resolver el juego estático planteado. Así se tiene en la inducción hacia atrás la secuencia:

Etapa 2: Encontrar el equilibrio de Nash que da mejor respuesta para los posibles valores de (a_1, a_2), que denotaremos por $(a_3^*(a_1,a_2), a_4^*(a_1,a_2))$. Supongamos que es único para cada valor de (a_1, a_2)

Etapa 1: Encontrar el equilibrio de Nash con las funciones de pagos $u_1(a_1,a_2,a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$ y $u_2(a_1,a_2,a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$, obteniendo el resultado $(a_1^*,a_2^*,a_3^*(a_1^*,a_2^*),a_4^*(a_1^*,a_2^*))$.

I.4.3.5 Aplicaciones con información imperfecta

I.4.3.5.1 Pánico bancario

Dos inversores invierten cada uno una cantidad D en un banco a largo plazo. Se plantean dos posibles fechas para sacar el dinero: una antes del vencimiento y otra al vencimiento. Según lo que hagan ambos se encuentran con los siguientes pagos:

- Si ambos sacan el dinero en la fecha 1 (antes del vencimiento) recibirán ambos una cantidad r predeterminada (tal que $D/2 < r < D$)
- Si uno saca en la fecha 1 y el otro no, el que saca recibe D y el que no, recibe $2r - D$.

- Si no sacan en la fecha 1, hay a su vez varias opciones:
  - Si sacan ambos en la fecha 2 (vencimiento), ambos reciben R, una cantidad predeterminada, verificando $R > D$
  - Si uno saca y el otro no, el que saca recibe $2R - D$ y el que no lo saca recibe D
  - Si ninguno lo saca, reciben ambos R

Veamos cuál es la solución de este juego mediante inducción hacia atrás.

Fecha 2: Si se llega a esta etapa, los jugadores juegan un juego estático cuya forma normal sería

$$\begin{array}{ll} & \quad \textbf{\textit{Sacar}} \qquad \textbf{\textit{No}} \\ \textbf{\textit{Sacar}} & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{R,R}} & \boldsymbol{2R - D, D} \\ \boldsymbol{D, 2R - D} & \boldsymbol{R,R} \end{pmatrix}$} \\ \textbf{\textit{No}} & \end{array}$$

y como puede apreciarse la solución es que ambos saquen el dinero.

Fecha 1: En la fecha 1 también juegan un juego estático cuya forma normal es

$$\begin{array}{ll} & \quad \textbf{\textit{Sacar}} \qquad \textbf{\textit{No}} \\ \textbf{\textit{Sacar}} & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{r,r} \rangle & \boldsymbol{D, 2r - D} \\ \boldsymbol{2r - D, D} & \langle \boldsymbol{R,R} \rangle \end{pmatrix}$} \\ \textbf{\textit{No}} & \end{array}$$

Este juego tiene dos puntos de equilibrio, pero con distintos pagos y uno mejor para ambos, de modo que el equilibrio sería que ninguno saque en la primera fecha y ambos lo hagan en la segunda. Sin embargo, también está en equilibrio que ambos saquen el dinero en la primera fecha, es decir, el pánico bancario, de modo que si se dan situaciones de entorno un poco adverso, éste equilibrio será también solución del juego. Es lo que ocurre en muchas situaciones reales, que aún habiendo un equilibrio mejor para ambos, supone una espera, mientras que también queda en equilibrio un par de estrategias cuya recompensa es inmediata.

I.4.3.5.2 Aranceles y competencia internacional imperfecta

Supóngase que se analiza el comercio de un producto entre dos países, y que el gobierno de cada uno de ellos establece un arancel, t_i a las importaciones del producto desde el otro país.

Supóngase que en cada país i hay una empresa que ha de decidir la producción para consumo nacional, h_i, y para exportación, e_i. Supóngase que el precio de venta de un producto en un país es función de la cantidad ofertada agregada, es decir, supóngase que es de la forma $P_i(Q_i) = a - Q_i = a - h_i - e_j$. Supóngase que el coste marginal o unitario de producción de ambas empresas es el mismo, c, y que el arancel actúa de forma lineal, es decir, $t_i e_j$.

Las ganancias de las empresas se pueden expresar como

$$\pi_i(t_i, t_j, h_i, e_i, h_j, e_j) = [a - (h_i + e_j)]h_i + [a - (e_i + h_j)]e_i - c(h_i + e_i) - t_j e_i$$

y la de los gobiernos, donde se incluye un término de utilidad de los consumidores por el hecho de disponer de una mayor cantidad del artículo, y se incluye el pago que recibe la empresa nacional como pago que recibe el gobierno, sería

$$W_i(t_i, t_j, h_i, e_i, h_j, e_j) = \frac{1}{2}Q_i^2 + \pi_i(t_i, t_j, h_i, e_i, h_j, e_j) + t_i e_j$$

(El término cuadrático expresa la utilidad de los consumidores).

Al resolver el juego, se resuelve primero el juego de las empresas, ya que ellas deciden después de conocer el arancel impuesto por los respectivos gobiernos. Así pues, la empresa del país i ha de maximizar su función de pagos, que se puede separar sin problemas en dos funciones, cada una de ellas de una de las variables de decisión de la empresa, es decir, se plantea los problemas

$$\max_{h_i \geq 0} h_i(a - (h_i + e_j^*) - c)$$

$$\max_{e_i \geq 0} e_i(a - (e_i + h_j^*) - c - t_j)$$

Al derivar e igualar a cero, se obtienen las ecuaciones de primer orden de ambas empresas, y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se tienen las siguientes funciones de mejor respuesta, que son función de los aranceles:

$$h_i^* = \frac{a - c + t_i}{3} \qquad e_i^* = \frac{a - c - 2t_j}{3}$$

Conocida esta función de mejor respuesta, los gobiernos pueden plantear su juego estático, consistente en maximizar la función de pagos:

$$\max_{t_i \geq 0} \frac{1}{2}\left(\frac{2(a - c) - t_i}{3}\right)^2 + \frac{(a - c + t_i)^2}{9} + \frac{\left(a - c - 2t_j^*\right)^2}{3} + t_i\frac{a - c - 2t_i}{3}$$

Al establecer las condiciones de primer orden derivando e igualando a cero, la solución que se obtiene final para aranceles, producciones nacionales y exportaciones es:

$$t_i^* = \frac{a - c}{3} \qquad h_i^* = \frac{4(a - c)}{9} \qquad e_i^* = \frac{a - c}{9}$$

Obsérvese que con esta solución, la cantidad agregada en cada país es $5(a - c)/9$, que es inferior a $2(a - c)/3$ que sería la cantidad de un modelo de Cournot. Precisamente, esta última cantidad, la del equilibrio de Cournot, sería la solución si las tasas arancelarias fueran cero, que a se vez sería la solución si los gobiernos resolvieran el problema conjuntamente, cooperando ($\max_{t_1, t_2 \geq 0} W_1(t_1, t_2) + W_2(t_2, t_1)$). Por otra parte, esta segunda solución implica que hay más artículos en el mercado, lo que socialmente es mejor (término cuadrático de utilidad de los consumidores). De modo que con este ejemplo se puede observar que los gobiernos tenderán a establecer acuerdos, de modo que se eliminen los aranceles, una tendencia que se puede constatar en la realidad. Sin embargo, hay que ser cautos al analizar este resultado, ya que se ha supuesto que la capacidad de producción de las empresas de ambos países así como sus costes marginales son iguales, lo cuál es razonable para países con una situación económica semejante pero no cuando hay grandes desequilibrios. El problema 20 se centra en pedir establecer la política de aranceles cuando hay distintos costes de producción.

I.4.3.5.3 Juegos repetidos en T etapas

Sea G un juego de una etapa, y sea $G(T)$ el juego consistente en repetir el juego G durante T etapas, de modo que en cada etapa los jugadores conocen los resultados de las etapas anteriores. Considérese una función de pagos aditiva, de modo que el pago al final de las T etapas es la suma de los pagos de cada etapa. Se pueden demostrar los dos resultados siguientes:

- Si G tiene un único equilibrio de Nash, entonces $G(T)$ tiene un único resultado perfecto en subjuegos, consistente en jugar en todas las etapas el equilibrio de Nash.
- Si G tiene más de un equilibrio de Nash, entonces pueden existir resultados perfectos en subjuegos de $G(T)$ tales que para $t < T$ el resultado no sea jugar un equilibrio de Nash.

A continuación, se ilustran estos resultados con sendos ejemplos.

El primer ejemplo es un juego de dos jugadores y dos etapas, en el que en cada etapa ambos jugadores tienen 3 estrategias (A, B, C) y la matriz de pagos del juego de una etapa es $\begin{pmatrix} 1,1* & 5,0 & 0,0 \\ 0,5 & 4,4 & 4,0 \\ 0,0 & 0,0 & 3,3 \end{pmatrix}$. El juego de una etapa sólo tiene un equilibrio de Nash, (A,A), marcado con un asterisco. Analicemos el juego de 2 etapas.

En la segunda etapa, la estrategia de los jugadores será esa. En la primera, sabiendo lo que harán en la segunda, la matriz de pagos acumulados será $\begin{pmatrix} 2,2* & 6,1 & 1,1 \\ 1,6 & 5,5 & 5,1 \\ 1,1 & 1,1 & 4,4 \end{pmatrix}$, cuyo único punto en equilibrio es (A,A). Así pues, el único resultado perfecto en subjuegos es jugar el equilibrio de Nash en ambas etapas.

Sea ahora el mismo juego, pero con la matriz de pagos $\begin{pmatrix} 1,1* & 5,0 & 0,0 \\ 0,5 & 4,4 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 3,3* \end{pmatrix}$. Este juego tiene dos pares de estrategias en equilibrio, (A,A) y (C,C), aunque el primer par está dominado ya que el segundo ofrece mejores pagos. En esta ocasión, los jugadores pueden plantear otro tipo de estrategia, que incluya penalizaciones o amenazas. Así, lsi los jugadores prevén na estrategia que pueden valorar es que si en la primera etapa las estrategias elegidas por los jugadores son (B,B), la respuesta en la segunda etapa sea el equilibrio que más les favorece, mientras que si es cualquier otra opción, en la segunda etapa se llegue al equilibrio que menos les favorece. Con este comportamiento, la matriz de pagos de la primera etapa, donde se ha incluido la respuesta de la segunda, sería $\begin{pmatrix} 2,2\,* & 6,1 & 1,1 \\ 1,6 & 7,7\,* & 1,1 \\ 1,1 & 1,1 & 4,4\,* \end{pmatrix}$, que tiene tres pares de estrategias en equilibrio, pero, hay un par que claramente domina a los otros dos, jugar en la primera etapa (B,B), y en la segunda (C,C). Esto demuestra que amenazas o promesas creíbles sobre el futuro pueden modificar el comportamiento presente, incluso haciendo que la solución del presente no sea un equilibrio de Nash. A pesar de todo, en este planteamiento hay una amenaza poco creíble que es la correspondiente a llegar en la primera etapa a la solución (A,A) y volver a hacerlo en la segunda. Si fuera así, se podría renegociar para ver la segunda etapa, pudiendo llegar a la solución (C,C) en la segunda, aunque en ningún caso se obtiene mejor resultado que el dado por (B,B) en la primera y (C,C) en la segunda.

Veamos otro ejemplo de 2 jugadores, en 2 etapas, 5 estrategias (A,B,C,D,E) para cada uno delos jugadores y función de pagos de cada etapa

$$\begin{pmatrix} 1,1\,* & 5,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,5 & 4,4 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 3,3\,* & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 4,1/2\,* & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1/2,4\,* \end{pmatrix}$$

Como puede observarse, hay 3 pares de estrategias en equilibrio, pero el par (C,C) domina estrictamente en el sentido de Pareto al par (A,A). Los otros dos pares son incomparables (estarían en la frontera de Pareto).

Los jugadores, previendo el castigo o penalización, prevén que el resultado de la segunda etapa será:

- Si en la etapa 1 juegan (B,B), en la etapa 2 jugar (C,C)
- Si en la etapa 1 juegan (B, no B), en la segunda el jugador 1 castiga a 2 eligiendo D, con lo que 1 también ha de elegir D para maximizar su beneficio, luego la solución será (D,D)

- Si en la etapa 1 juegan (no B, B), en la segunda el jugador 2 castiga a 1 eligiendo E, con lo que 1 también ha de elegir E para maximizar su beneficio, luego la solución será (E,E)
- Si en la etapa 1 juegan (no B, no B), en la segunda juegan (C,C) (no hay castigo).

Con esta función de respuesta de la segunda etapa, la matriz de pagos acumulados de la primera queda:

$$\begin{pmatrix} 4,4\,* & 11/2,4 & 3,3 & 3,3 & 3,3 \\ 4,11/2 & 7,7\,* & 4,1/2 & 4,1/2 & 4,1/2 \\ 3,3 & 1/2,4 & 6,6\,* & 3,3 & 3,3 \\ 3,3 & 1/2,4 & 3,3 & 7,7/2 & 3,3 \\ 3,3 & 1/2,4 & 3,3 & 3,3 & 7/2,7 \end{pmatrix}$$

Como puede observarse hay 3 puntos de equilibrio, pero uno que domina estrictamente a los otros dos, de modo que ésa debería ser la solución: jugar (B,B) en la primera (que no es un equilibrio de Nash para una etapa), y jugar después (C,C).

I.4.3.5.4 Juegos repetidos en infinitas etapas: colusión entre duopolistas de Cournot

Sea G un juego de una etapa, y sea $G(\infty,\delta)$ el juego consistente en repetir el juego G indefinidamente en el tiempo con una tasa de descuento por etapa de δ, de modo que en cada etapa los jugadores conocen los resultados de las etapas anteriores. Considérese una función de pagos aditiva, de modo que el pago al final de n etapas es la suma de los pagos de cada etapa. Se puede demostrar que, incluso si G tiene un único punto de equilibrio de Nash, existen resultados perfectos en subjuegos que no son jugar ese equilibrio. Obsérvese que en este planteamiento es necesaria una tasa o factor de descuento, pues si no, la suma de pagos sería infinito. El valor presente de una sucesión de pagos $\{\pi_t\}_{t\geq 1}$, aplicando el factor de descuento, será $\sum_{t=1}^{\infty}\pi_t\delta^{t-1}$.

Supongamos que el juego de una etapa es del tipo del dilema del prisionero, y sea la matriz de pagos $\begin{pmatrix} 1,1 & 5,0 \\ 0,5 & 4,4 \end{pmatrix}$. En este tipo de juegos, se considera la llamada *estrategia disparador*, que consiste en cooperar durante las etapas hasta que un jugador deje de cooperar, en que se cambia a jugar el equilibrio de Nash.

Obsérvese que si el jugador 1 juegas esta estrategia, también para el jugador 2 ésta es la mejor estrategia, ya que si J2 cambia en la primera etapa, la ganancia de J2 será $5+\sum_{t\geq 2}\delta^{t-1}=5+\dfrac{\delta}{1-\delta}$. Ahora, si decide no cambiar la ganancia será $\sum_{t\geq 1} 4\delta^{t-1} = \dfrac{4}{1-\delta}$. Comparando ambos términos, $5+\dfrac{\delta}{1-\delta} > \dfrac{4}{1-\delta} \Rightarrow 5-4\delta > 4 \Rightarrow \delta < 1/4$, es decir, el factor de descuento tendría que ser menor que ¼ para que fuera preferible no cooperar (es decir, el valor hoy de un dinero ganado en la siguiente etapa tendría que ser menor que la cuarta parte, lo que no parece admisible ni una hipótesis razonable para los tipos de interés, etc. que se manejan habitualmente, aunque en casos de mucha inflación se hayan dado circunstancias semejantes).

El ejemplo anterior, sirve para introducir los resultados siguientes. En un juego repetido infinitamente del tipo $G(\infty,\delta)$, cada subjuego que se inicia en la etapa $t+1$ es idéntico al original. Por otra parte, se definen *ganancias factibles* $(x_1,...,x_n)$ como las combinaciones lineales convexas de las ganancias obtenidas mediante las estrategias puras de una etapa. Se define *ganancia media* como la ganancia constante (igual en todas las etapas, salvo el factor de descuento) que debería tenerse en cada etapa para que tuviera el mismo valor presente que una ganancia dada por una sucesión de estrategias. Es decir, dada la sucesión de pagos $\{\pi_t\}_{t\geq 1}$, la ganancia media ha de ser tal que $\sum_{t\geq 1} V\delta^{t-1} = \sum_{t\geq 1} \pi_t\delta^{t-1}$. Dado que el primer término es $\dfrac{V}{1-\delta}$, la ganancia media será $V = (1-\delta)\sum_{t\geq 1} \pi_t\delta^{t-1}$.

Teorema (de Friedman o de tradición oral o folk)

Sea $(e_1,...,e_n)$ las ganancias en el equilibrio de Nash para el juego G, y sea $(x_1,...,x_n)$ una ganancia factible tal que $x_i > e_i, \forall i$. Entonces, existe un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de $G(\infty,\delta)$ con $(x_1,...,x_n)$ de ganancia media.

Este resultado implica que hay una solución que no es jugar el equilibrio de Nash, sino otras estrategias. Esto es lo que se llama *colusión*.

Veamos el planteamiento si en cada etapa se juega un juego como el del modelo de Cournot. Recuérdese que planteábamos dos empresas que han de decidir su nivel de producción, siendo su coste marginal c constante e igual para ambas, y el precio de la forma $P(Q) = a - Q = a - q_1 - q_2$. En este caso, el punto de equilibrio en una etapa es $q_1 = q_2 = \dfrac{a-c}{3}$, con lo que la cantidad agregada es $Q = \dfrac{2(a-c)}{3}$, y el beneficio de cada empresa es $(a-c)^2/9$. Sin embargo, la cantidad de monopolio, que sería la que obtendrían si cooperaran ya que produce mejores beneficios, era $q_1 = q_2 = \dfrac{a-c}{4}$, dado que la cantidad agregada debería ser $Q = \dfrac{a-c}{2}$, con un beneficio por empresa de $(a-c)^2/8$.

Si este juego se repitiera infinitas veces, la estrategia disparador sería jugar la cantidad de monopolio hasta que una de las empresas incumpla esto, en cuyo caso cambiar a jugar la cantidad en equilibrio de Cournot.

Si ambas empresas juegan la cantidad de monopolio, el beneficio ya se ha comentado es $(a-c)^2/8$; si ambas juegan la cantidad de equilibrio de Cournot, el beneficio por empresa es $(a-c)^2/9$; por último, si una juega el de monopolio y otra el de Cournot, la empresa que no lo juega maximiza sus beneficios jugando $3(a-c)/8$ (ya que resolvería el problema de maximización $\max_{q_j \geq 0}(a - q_j - (a-c)/4 - c)q_j)$, de modo que obtendría $9(a-c)^2/64$ y la que juega la cantidad de monopolio recibiría $3(a-c)^2/32$ (que es peor).

Así pues, ambas empresas jugarán la estrategia disparador si se cumple que la ganancia con la cantidad de monopolio es mayor que cambiando en la primera etapa y continuando con el equilibrio de Cournot, es decir, si $\frac{1}{1-\delta}(a\text{ - }c)^2/8 \geq 9(a\text{ - }c)^2/64 + \frac{\delta}{1\text{ - }\delta}(a\text{ - }c)^2/9$, lo que es cierto si $\delta \geq 9/17$, es decir, en la mayoría de las situaciones entrarán en colusión, lo que quiere decir que cooperarán y que el precio del artículo será el del monopolio y no el del equilibrio de Cournot.

I.4.4 Juegos no cooperativos con información incompleta o juegos bayesianos

Estos modelos responden a situaciones en las que la información es incompleta, es decir, en las que al menos un jugador no está seguro de la función de ganancias del otro jugador. Un ejemplo típico de aplicación de estos modelos es las subastas de sobre cerrado, donde los jugadores introducen su oferta en un sobre cerrado y al fin se abren y se selecciona una de las ofertas. La peculiaridad es que al menos alguno de los jugadores no sabe con certeza como otro de los jugadores valora ganar la subasta.

Este tipo de juegos en los que hay información privada, suelen ser dinámicos por naturaleza, ya que las partes informadas tienden a comunicar (informar o confundir) mientras que las no informadas tienden a buscar información. Sin embargo, en esta sección sólo se verá una introducción a este tipo de juegos, enfocando los conceptos al caso estático, aunque sean de validez en el dinámico.

Para ver una situación clásica de juegos bayesianos, veamos el modelo de duopolio de Cournot con información asimétrica. El planteamiento es el mismo que el de Cournot, es decir, dos empresas que han de decidir a la vez su nivel de producción de un producto homogéneo, cuyo precio de venta es elástico con la demanda, $P(Q) = a - Q = a - q_1 - q_2$. Los costes unitarios de producción se consideran constantes, pero, en esta ocasión, consideremos que el coste de la empresa 1 es c y conocido por ambas, pero el de la empresa 2 no es conocido con certeza por la empresa 1, sino que ésta estima que el coste es c_A con probabilidad θ, y c_B con probabilidad $1-\theta$, siendo $c_A > c_B$.

Con este planteamiento, es por ambas conocido que el coste de producción de la empresa 1 es cq_1, mientras que de la empresa 2 lo que la otra empresa conoce es que el coste es $c_A q_2$ con probabilidad θ, y $c_B q_2$ con probabilidad $1-\theta$. Así la empresa 1, debe esperar que la empresa 2 resuelva el problema $q_2 * (c_A) = \max_{q_2} [(a - q_1 * - q_2) - c_A] q_2$ o bien $q_2 * (c_B) = \max_{q_2} [(a - q_1 * - q_2) - c_B] q_2$. La empresa 1, por tanto, para maximizar su beneficio esperado, se planteará el problema $\max_{q_1} \theta \left[(a - q_1 - q_2^*(c_A) - c \right] q_1 + (1-\theta) \left[(a - q_1 - q_2^*(c_B) - c \right] q_1$.

Si planteamos las condiciones de primer orden de estos problemas derivando e igualando a cero, se tienen las ecuaciones

$$q_2^*(c_A) = \frac{a - q_1^* - c_A}{2} \qquad q_2^*(c_B) = \frac{a - q_1^* - c_B}{2}$$

$$q_1^* = \frac{\theta \left[a - q_2^*(c_A) - c \right] + (1-\theta) \left[a - q_2^*(c_B) - c \right]}{2}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones la solución obtenida es

$$q_2^*(c_A) = \frac{a - 2c_A + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_A - c_B) \qquad q_2^*(c_B) = \frac{a - 2c_B + c}{3} - \frac{\theta}{6}(c_A - c_B)$$

$$q_1^* = \frac{a - 2c + \theta c_A + (1-\theta) c_B}{3}$$

Obsérvese que la solución con costes distintos del equilibrio de Cournot, sería $q_i^* = \dfrac{a - 2c_i + c_j}{3}$. Comparando lo que la empresa 2 obtiene por mantener su información privada, se tiene que $q_2^*(c_A) > \dfrac{a - 2c_A + c}{3}$ mientras que $q_2^*(c_B) < \dfrac{a - 2c_B + c}{3}$, es decir, si el coste es el más alto, produce más que lo que haría si la información fuera pública, mientras que si el precio es el más bajo, acaba produciendo menos que si lo hace público. Para la empresa 1 la respuesta es equivalente a considerar que la información es pública pero con coste de la otra empresa el coste medio o esperado.

Consideremos ahora como se puede representar en forma normal un juego bayesiano estático. Considérese que la función de pagos del jugador i es en realidad una colección de funciones, $u_i(a_1, \ldots, a_n; t_i)$, que dependen de t_i que es el tipo del jugador i, donde $t_i \in T_i$ que es el *espacio de tipos* del jugador i.

El jugador i conoce sus ganancias, es decir, su tipo, pero no está seguro del tipo de los demás jugadores, que denotaremos por $t_{-i} = (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$. Denotemos también por T_{-i} al conjunto de posibles valores de t_{-i}, y por

$p(t_{-i}/t_i)$ a la *conjetura* (probabilidad) sobre el tipo de los otros jugadores conocido el propio.

La forma normal del juego quedaría descrita por los siguientes elementos:

- Espacios de acciones, decisiones o estrategias: $A_1,...,A_n$
- Espacios de tipos: $T_1,...,T_n$
- Distribuciones de los tipos: $p_1,...,p_n$
- Funciones de ganancias: $u_1,...,u_n$ definidas para cada tipo, es decir, son de la forma $u_i(a_1,...,a_n;t_i)$. El tipo del jugador i ($t_i \in T_i$) sólo es conocido por él y determina su función de ganancias; las conjeturas representan la incertidumbre sobre los tipos de los demás jugadores, conocido el tipo propio. Las ganancias también pueden ser de la forma $u_i(a_1,...,a_n;t_1,...,t_n)$ si dependen de los tipos de los demás jugadores.

Así el juego queda representado como

$$G = \{A_1,...,A_n;T_1,...,T_n;p_1,...,p_n;u_1,...,u_n\}$$

Un juego bayesianto estático también puede ser representado en forma extensiva como si fuera un juego dinámico con información imperfecta:

1. El azar determina un vector de tipos $t = (t_1,...,t_n)$ según las distribuciones $p_1,...,p_n$
2. El azar revela t_i al jugador i, pero a ningún otro
3. Los jugadores toman decisiones a_i simultáneamente
4. Se reciben las ganancias $u_i(a_1,...,a_n;t_i)$ (que también pueden ser de la forma $u_i(a_1,...,a_n;t_1,...,t_n)$ si dependen de los tipos de los demás jugadores).

En ambos casos, las conjeturas $p_1,...,p_n$ son las distribuciones a priori que el azar sigue para determinar los tipos. Las conjeturas son las distribuciones a posteriori, que se determinan a partir de las distribuciones a priori mediante el teorema de Bayes:

$$p_i(t_{-i}/t_i) = \frac{p(t_{-i},t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i},t_i)}{\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p(t_{-i},t_i)}$$

En este contexto, una estrategia para el jugador i, $s_i(t_i)$ ha de definir la acción a_i que elegiría el jugador i para cada tipo $t_i \in T_i$ si el azar determinara que ése es su tipo.

El concepto de solución en este tipo de juegos es el de *equilibrio bayesiano de Nash*: la estrategia de cada jugador ha de ser una mejor respuesta a las del resto, es decir, dado el juego $G = \{A_1,...,A_n;T_1,...,T_n;p_1,...,p_n;u_1,...,u_n\}$, $s^* = (s_1^*,...,s_n^*)$ es un equilibrio bayesiano de Nash (en estrategias puras) si para cada i y para cada uno de sus tipos $t_i \in T_i$, $s_i^*(t_i)$ es solución de

$$\max_{a_i\in A_i} \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} u_i\left(s_1^*(t_1),...,s_{i-1}^*(t_{i-1}),a_i,s_{i+1}^*(t_{i+1}),...,s_n^*(t_n);t_i\right)p_i(t_{-i}/t_i)$$

Se puede demostrar que en todo juego bayesiano estático finito este equilibrio existe, aunque tal vez con estrategias mixtas.

Veamos una aplicación clásica: *subastas de sobre cerrado al primer precio.* Por simplificar, supongamos que hay dos jugadores que van a pujar por un bien introduciendo en un sobre cerrado sus respectivas pujas. Se llevará el bien el que presente una puja más alta, pero, tendrá que pagarla. En caso de empate, se tira una moneda y el que gane se lleva el bien y paga la puja. Se considera que ambos jugadores son neutrales al riesgo y que todo se hace de forma pública. Además cada jugador tiene una valoración personal, v_i, del bien, conocida por sí mismo pero desconocida por el otro participante, si bien ambos prevén que la valoración del bien por el otro participante sigue una distribución uniforme en [0,1] (obsérvese que se pone la distribución uniforme también llamada no informativa, ya que no da más probabilidad a ninguna zona del intervalo; si hubiera alguna información acerca de la valoración del bien por el otro jugador se debería poner otra distribución que represente mejor la incertidumbre con esa información). Además cada uno valora con independencia del valor que haya dado el otro jugador (a un jugador no le informa saber su valoración para conocer algo de la valoración del otro jugador).

Así pues, el juego se plantea con los siguientes elementos:

- Acciones: pujas de los jugadores, $b_i \geq 0$. Así pues los espacios de acciones son $[0,\infty)$.
- Tipos: las valoraciones de cada jugador del bien $0 \leq v_i \leq 1$
- Conjeturas: distribuciones uniformes en [0,1]
- Ganancias: dadas las condiciones del juego serían las siguientes, donde el caso de empate se representa por la ganancia esperada:

$$u_i(b_1,b_2;v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & b_i > b_j \\ \dfrac{v_i - b_i}{2} & b_i = b_j \\ 0 & b_i < b_j \end{cases}$$

- Estrategias: dar la acción para cada tipo propio, es decir, serán de la forma $b_i(v_i)$.

El concepto de solución de equilibrio bayesiano de Nash, hace que las estrategias en equilibrio $b_i(v_i)$, hayan de ser solución del problema de cada jugador $\max\limits_{b_i \geq 0}(v_i - b_i)\Pr\left\{b_i > b_j(v_j)\right\} + \frac{1}{2}(v_i - b_i)\Pr\left\{b_i = b_j(v_j)\right\}$.

Vamos a simplificar la búsqueda suponiendo que las pujas sean de tipo lineal, es decir, de la forma $b_i(v_i) = a_i + c_i v_i$ (esta simplificación no es tal, ya que se puede demostrar que es la mejor solución). Dado que ambas distribuciones son independientes y uniformes en [0,1], se tiene que $\Pr\left\{v_i = v_j\right\} = 0$, y por lo tanto, de considerar las pujas funciones lineales de la valoración, se deduce de forma inmediata que $\Pr\left\{b_i = b_j(v_j)\right\} = 0$. De modo que el problema a resolver queda reducido a $\max\limits_{b_i \geq 0}(v_i - b_i)\Pr\left\{b_i > a_j + c_j v_j\right\}$.

Por otra parte, la probabilidad que aparece se puede obtener como

$\Pr\left\{b_i > a_j + c_j v_j\right\} = \Pr\left\{v_j < \dfrac{b_i - a_j}{c_j}\right\} = \dfrac{b_i - a_j}{c_j}$ si $b_i \geq a_j$, ó cero en otro caso.

Por lo tanto el problema resulta $\max\limits_{b_i \geq 0}(v_i - b_i)\dfrac{b_i - a_j}{c_j}$.

Derivando e igualando a cero para obtener las condiciones de primer orden, se tiene $-\dfrac{b_i - a_j}{c_j} + \dfrac{v_i - b_i}{c_j} = \dfrac{-2b_i + a_j + v_i}{c_j} = 0$, de donde se deduce que la solución es $b_i(v_i) = \begin{cases} (v_i + a_j)/2 & \text{si } v_i \geq a_j \\ a_j & \text{si } v_i < a_j \end{cases}$. Analicemos el resultado:

- Si $0 < a_j < 1$: entonces la puja no sería lineal, lo que va en contra de la hipótesis de partida
- Si $a_j \geq 1$: entonces la puja sería mayor que la valoración, lo que sería absurdo (pagar por algo más de lo que se valora)
- Si $a_j \leq 0$: entonces siempre se tiene el primer caso, con lo que la puja sería de la forma $b_i(v_i) = \dfrac{v_i + a_j}{2}$, es decir, los valores serían $c_i = 1/2$ y $a_i = a_j/2$.

Como también se tiene el mismo razonamiento para el otro jugador, se tiene $c_j = 1/2$ y $a_j = a_i/2$, de modo que, para que haya solución, necesariamente ha de darse $a_i = a_j = 0$, con lo que la estrategia óptima para cada jugador es dar $b_i(v_i) = v_i/2$. Es decir, cada uno debería pujar por la mitad de la valoración personal, de modo que se llevará el bien quien más lo valore, pagando por él la mitad del valor que le da.

El campo de aplicación de estos juegos es amplio, y los desarrollos asociados a la búsqueda de equilibrios bayesianos en juegos estáticos y dinámicos también (especialmente relevante es el *principio de revelación*). En particular, las subastas en que se desconoce al menos en parte la función de utilidad de los demás participantes, son unas de las aplicaciones más importantes de este tipo de juegos. Sin embargo, dado el carácter introductorio de este curso no se van a presentar estos desarrollos.

I.4.5 Juegos cooperativos: las coaliciones

En muchos casos de competencia hay más de dos competidores, y además la posibilidad de cooperar entre ellos. En estos juegos la solución pasa por analizar las posibles *coaliciones* que pueden plantearse. Sin embargo, lo que se considerará solución del juego no es fundamentalmente la coalición que se planteará, sino el pago que recibirá cada uno de los jugadores. Una coalición es un subconjunto de jugadores.

I.4.5.1 Caracterización de un juego n-personal: la función característica.

Sea $N = \{1,2,...,n\}$ el conjunto de jugadores. Un juego de n personas se especifica con la función característica de ese juego:

La *función característica* v de un juego indica para cada subconjunto $S \subseteq N$ la cantidad $v(S)$ que los miembros de S pueden estar seguros de recibir si actúan unidos formando una coalición, es decir, sin ayuda de ninguno de los jugadores de fuera de la coalición.

Para que una función sea función característica de un juego ha de cumplir la propiedad de la *superaditividad*: para todo par de conjuntos A y B tales que $A \cap B = \varnothing$, es decir, que no tengan jugadores en común, ha de cumplirse que $v(A \cup B) \geq v(A) + v(B)$. Básicamente, quiere decir que si los jugadores se agrupan pueden conseguir al menos lo mismo que sin agrupar, ya que en el peor de los casos, la coalición siempre tiene la opción de actuar por separado, recibiendo la cantidad $v(A) + v(B)$, luego al menos puede alcanzar ese valor.

Ejemplo 1. Supóngase que un farmacéutico inventa un fármaco nuevo pero no puede fabricarlo él solo. Puede vender su fórmula a la empresa 2 o a la 3. La empresa afortunada compartirá 1 millón de euros con el inventor.

Si el jugador 1 es el inventor, el 2 la empresa 2 y el 3 la empresa 3, la función característica del juego es:

$$v(\{\ \}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1000000$$

Ejemplo 2. Supóngase que el jugador 1 es el propietario de un terreno que valora en 100000€. El jugador 2 es una promotora que puede urbanizar el terreno dándole un valor de 200000€ y el jugador 3 otra promotora que puede urbanizar dando un valor de 300000€. La función característica del juego sería

$$v(\{\ \}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0 \quad v(\{1\}) = 100000$$

$$v(\{1,2\}) = 200000 \quad v(\{1,3\}) = 300000 \quad v(\{1,2,3\}) = 300000$$

Ejemplo 3. Supongamos que tres tipos de aviones usan un aeropuerto. El avión de tipo 1 necesita 100 metros de pista, el tipo 2 150 y el tipo 3 400 metros. Supongamos que el coste de mantenimiento de la pista es proporcional a la longitud de ésta. Como a ese aeropuerto llegan aviones de tipo 3 la longitud de la pista ha de ser de 400 metros. Supongamos por simplificar que al aeropuerto llegan por día uno de cada uno de esos aviones. El objetivo es decidir qué parte del coste de mantenimiento corresponde a cada avión. Esta situación puede representarse como un juego con la siguiente función característica, donde se anota como ganancia negativa el coste para que se cumpla la propiedad de la superaditividad,

$$v(\{\ \}) = 0 \quad v(\{1\}) = -100 \quad v(\{2\}) = -150 \quad v(\{3\}) = -400 \quad v(\{1,2\}) = -150$$

$$v(\{1,3\}) = -400 \quad v(\{2,3\}) = -400 \quad v(\{1,2,3\}) = -400$$

I.4.5.2 Una caracterización de las soluciones: las imputaciones

Hay muchos criterios acerca de cómo caracterizar la solución para juegos con n personas, es decir, de cómo expresar las soluciones. Una forma de hacerlo, que será la que vamos a manejar en esta introducción, es indicar el pago que recibirá cada jugador con esa solución. Sin embargo, no cualquier vector de pagos se considera que puede ser una solución razonable de un juego. Así las posibles soluciones de un juego reciben el nombre de imputaciones y han de cumplir determinadas condiciones:

Un vector de pagos $x = (x_1, ..., x_n)$ es una *imputación* si verifica

$$v(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{(Racionalidad del grupo)}$$

$$x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N \quad \text{(Racionalidad individual)}$$

La primera ecuación dice que cualquier vector razonable de pagos ha de dar a todos los jugadores una cantidad que sea igual a la lograda por la supercoalición de todos los jugadores juntos. El segundo bloque dice que ha de dar a cada uno al menos lo que lograría él solo.

Así para el ejemplo 1 de la sección anterior, el del inventor, una imputación ha de cumplir

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000000$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

Para el ejemplo 2, el del terreno, sería

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300000$$

$$x_1 \geq 100000 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

y para el ejemplo 3, el del aeropuerto, sería

$$x_1 + x_2 + x_3 = -400$$

$$x_1 \geq -100 \quad x_2 \geq -150 \quad x_3 \geq -400$$

Cualquier concepto de solución para juegos de n personas consiste en escoger un subconjunto del conjunto de imputaciones. Sin embargo, no existe un único criterio acerca de cómo ha de seleccionarse ese subconjunto. A continuación, se muestran dos conceptos de solución, es decir, dos criterios diferentes con diferentes condiciones que han de cumplir las imputaciones para ser una solución.

I.4.5.3 Un concepto de solución de un juego: El núcleo

Para saber lo que es el núcleo de un juego n-personal antes hay que entender el concepto de dominación entre imputaciones. Dadas dos imputaciones $x=(x_1,\dots,x_n)$ e $y=(y_1,\dots,y_n)$, se dice que y *domina* a x a través de una coalición S, y se denota por $y >^S x$, si

$$\sum_{i\in S} y_i \leq v(S)$$
$$y_i > x_i \quad \forall i \in S$$

Básicamente, se está diciendo con la primera desigualdad que los valores de la imputación que domina a la otra sean alcanzables por los miembros de la coalición, y con la segunda que los jugadores de la coalición siempre preferirán la imputación y a la x.

Con esta última consideración, las imputaciones dominadas no deberían ser consideradas como solución posible al juego, ya que los jugadores de la coalición pueden rechazar los pagos ofrecidos por tales imputaciones y reforzar su rechazo aliándose entre sí, ya que con seguridad juntos pueden lograr la cantidad $v(S)$. Los creadores de la teoría de juegos, Von Neumann y Morgenstern, decían que un concepto razonable de solución de un juego es el conjunto de todas las imputaciones no dominadas.

El *núcleo* de un juego n-personal se define como el conjunto de todas las imputaciones no dominadas.

Otra cuestión es cómo obtener el núcleo. El siguiente teorema resuelve este problema.

Teorema: Una imputación $x=(x_1,\dots,x_n)$ pertenece al núcleo de un juego de n-personas si y sólo si para todo subconjunto $S \subseteq N$, se verifica

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$$

El teorema viene a decir que una imputación es del núcleo si y sólo si para todas las coaliciones los pagos recibidos por los miembros de la coalición son al menos tan grandes como los que pueden recibir si se unen.

Veamos cuál es el núcleo en los tres ejemplos que estamos manejando:

1. En el juego del inventor las imputaciones tenían que cumplir unas condiciones, si le añadimos las condiciones del teorema, las imputaciones del núcleo han de cumplir el sistema de desigualdades siguiente:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000000 \qquad x_1 + x_2 \geq 1000000$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_1 + x_3 \geq 1000000$$
$$x_2 + x_3 \geq 0$$

Este sistema sólo tiene una solución que será el núcleo del juego que es $x = (1000000, 0, 0)$, es decir, el inventor debe recibir el millón de euros. Así el núcleo subraya la importancia del jugador 1, es decir, del inventor.

2. En el juego del propietario del terreno, las condiciones de imputación junto con las del núcleo dan el siguiente sistema

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300000 \qquad x_1 + x_2 \geq 200000$$
$$x_1 \geq 100000 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_1 + x_3 \geq 300000$$
$$x_2 + x_3 \geq 0$$

Las soluciones de este sistema han de cumplir $x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 300000$ y $x_1 \geq 200000$, es decir, la solución es que el jugador 3, pague al jugador 1, el propietario, una cantidad x_1 entre 200000 y 300000 euros por su terreno, siendo su pago $300000 - x_1$. La promotora 2 se queda fuera.

3. En el juego del aeropuerto, las condiciones de imputación junto con las del núcleo plantean el siguiente sistema

$$x_1 + x_2 + x_3 = -400 \qquad x_1 + x_2 \geq -150$$
$$x_1 \geq -100 \quad x_2 \geq -150 \quad x_3 \geq -400 \quad x_1 + x_3 \geq -400$$
$$x_2 + x_3 \geq -400$$

Las soluciones de este sistema, o mejor en términos del juego original, las soluciones del juego son múltiples, pero han de cumplir, que el avión tipo 1 pague entre 0 y 100, el de tipo 2 entre 0 y 150 pero entre ambos no pagan más de 150, y el de tipo 3 pagará el resto, que puede ir entre 250 y los 400 totales, dependiendo de los valores anteriores. Así pues, para este juego el núcleo es bastante amplio, aunque queda claro en qué márgenes de pago se mueve cada uno.

I.4.5.4 Un concepto de solución de un juego: El valor Shapley

El concepto de núcleo como solución de un juego, ya se ha visto que en algunas ocasiones como en el ejemplo 1 le da todo el beneficio al jugador 1, al inventor, y en otras, como el ejemplo 3, da una solución demasiado amplia. El valor Shapley que se presenta en esta sección, pretende dar soluciones más equitativas que las del núcleo, y más concretas.

Para cualquier función característica, Shapley demostró que existe un único vector de pagos que satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1: Si los jugadores recibieran otros nombres se intercambiarían los pagos. Por ejemplo, si es un juego de 3 personas y el valor de Shapley fuera el vector de pagos (1,2,3), si intercambiamos el orden de los jugadores y el primero pasa a ser el tercero y viceversa, entonces el valor de Shapley sería (3,2,1).

Axioma 2: $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$. Es la racionalidad de grupo.

Axioma 3: Si existe un jugador i tal que $v(S \cup \{i\}) = v(S) \quad \forall S \subseteq N$, entonces el valor de Shapley asigna $x_i = 0$. Es decir, si el jugador no agrega valor a coalición alguna, entonces recibe un pago de cero en el valor de Shapley.

Axioma 4: Sean v y $\overline{v}$ las funciones características de dos juegos diferentes pero con jugadores idénticos. Se define el juego suma $(v+\overline{v})$ como el juego cuya función característica es la suma de ambas, es decir, $(v+\overline{v})(S) = v(S) + \overline{v}(S)$. El axioma dice que si x es el valor Shapley para el juego v, e y es el valor Shapley para el juego $\overline{v}$, entonces el valor Shapley para el juego $(v+\overline{v})$ es el vector $x+y$.

El siguiente resultado enunciado por Shapley asegura la existencia de un único vector con estas características, y permite hallarlo.

<u>Teorema</u>: Dado cualquier juego n-personal con función característica v, existe un único vector de pagos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que satisface los axiomas 1 a 4. El pago del i-ésimo jugador viene dado por la expresión

$$x_i = \sum_{S \text{ tal que } i \notin S} p_n(S)\left\{v(S \cup \{i\}) - v(S)\right\} \text{ siendo } p_n(S) = \frac{card(S)!(n - card(S) - 1)!}{n!}$$

La interpretación de esta ecuación es la siguiente: supongamos que los jugadores llegan en un orden aleatorio, entonces cualquiera de las permutaciones tiene una probabilidad $\frac{1}{n!}$ de ocurrir; supongamos que cuando llega el jugador i forma una coalición con los jugadores presentes, entonces aportaría una cantidad $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ a la coalición; la probabilidad de que cuando llegue ya estén presentes los jugadores de la coalición es $p_n(S)$; así el pago del jugador i debe ser la cantidad esperada con la que contribuye el jugador cuando llega.

El valor Shapley se puede utilizar como una medida del poder de cada jugador. Por ejemplo, el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas consta de 5 miembros permanentes con derecho a veto, y 10 miembros no permanentes. Para que una resolución sea aprobada ha de recibir al menos 9 votos (incluyendo a todos los permanentes por el derecho a veto). La función característica del juego puede definirse asignando valor 1 a cada coalición que pueda aprobar una resolución y 0 a las demás. Es fácil demostrar que el valor de Shapley para este juego es 0.1963 para cada jugador permanente y 0.001865 para cada jugador no permanente, con lo que 5x0.1963=0.9815, es decir, el 98.15% del poder reside en los miembros permanentes.

En los ejemplos, el valor de Shapley sería el siguiente:

1. En el juego del inventor sería:

$$x_1 = \frac{2}{6}(0-0) + \frac{1}{6}(1000000-0) + \frac{1}{6}(1000000-0) + \frac{2}{6}(1000000-0) = \frac{2000000}{3}$$
$$x_2 = \frac{2}{6}(0-0) + \frac{1}{6}(1000000-0) + \frac{1}{6}(0-0) + \frac{2}{6}(1000000-1000000) = \frac{1000000}{6}$$
$$x_3 = \frac{2}{6}(0-0) + \frac{1}{6}(1000000-0) + \frac{1}{6}(0-0) + \frac{2}{6}(1000000-1000000) = \frac{1000000}{6}$$

   Esta solución presupone que las dos empresas llegan a un acuerdo, es decir, que ninguna se queda fuera en la solución, compartiendo la fabricación del invento, y repartiendo por lo tanto los beneficios.

   Esta solución es más interesante para las empresas aunque menos para el inventor que la del núcleo, aunque si las empresas pueden colaborar es más equitativa, de modo que el beneficio no es sólo para el inventor. Así mismo puede ser interpretado como que el 66.66% del poder del juego lo tiene el inventor y un 16.66% cada una de las empresas.

2. En el juego del propietario del terreno el valor Shapley es el siguiente:

$$x_1 = \frac{2}{6}(100000-0) + \frac{1}{6}(200000-0) + \frac{1}{6}(300000-0) + \frac{2}{6}(300000-0) = \frac{1300000}{6}$$
$$x_2 = \frac{2}{6}(0-0) + \frac{1}{6}(200000-100000) + \frac{1}{6}(0-0) + \frac{2}{6}(300000-300000) = \frac{100000}{6}$$
$$x_3 = \frac{2}{6}(0-0) + \frac{1}{6}(300000-100000) + \frac{1}{6}(0-0) + \frac{2}{6}(300000-200000) = \frac{400000}{6}$$

   Esta solución también resulta más equitativa, presuponiendo que ambas empresas pueden colaborar en la urbanización del terreno, compartiendo parte de los beneficios junto con el propietario. El poder o participación en el valor final del propietario es del 72.22%, de la primera empresa 5.55% y de la segunda empresa 22.22%.

3. Para el tercer ejemplo, el de decidir la participación en los costes de cada tipo de avión, el valor Shapley sería

$$x_1 = \frac{2}{6}(-100-0) + \frac{1}{6}(-150-(-150)) + \frac{1}{6}(-400-(-400)) + \frac{2}{6}(-400-(-400)) = \frac{-200}{6}$$
$$x_2 = \frac{2}{6}(-150-0) + \frac{1}{6}(-150-(-100)) + \frac{1}{6}(-400-(-400)) + \frac{2}{6}(-400-(-400)) = \frac{-350}{6}$$
$$x_3 = \frac{2}{6}(-400-0) + \frac{1}{6}(-400-(-100)) + \frac{1}{6}(-400-(-150)) + \frac{2}{6}(-400-(-150)) = \frac{-1850}{6}$$

Así, la participación en el coste de mantenimiento de la pista debería ser que el avión tipo 1 pague 33.33, el avión tipo 2 58.33 y el avión tipo 3 308.33. Básicamente, este reparto lo que dice es que los primeros 100 metros los pagan entre todos los usuarios, es decir, un tercio cada uno (33.33); los siguientes 50 metros son pagados por los usuarios, es decir, por los aviones tipo 2 y tipo 3, de modo que cada uno para 25; y los siguientes 250 se pagan por el único usuario que es el avión tipo 3. Así, es fácil extrapolar y se puede comprobar que este criterio de reparto de costes es el que debería aplicarse incluso aunque no fuera un avión de cada tipo.

I.5 Referencias

Benayoun, R., Roy, B., Sussman, B. Electre: Une Méthode pour Guider le Choix en Présence de Vue Multiples. *Sema* (*Metra International*), Direction Scientifique. Note de travail, 49.

Bertrand, J. (1883) Théorie Mathématique de la Richesse Sociale. *Journal des Savants* 499-508.

Charnes, A., Cooper, W.W (1961) *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming.* John Wiley and Sons.

Cournot, A. (1838) *Recherches su le Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses.*

DeGroot, M.H. (1970) *Optimal Statistical Decisions*, McGraw Hill, New York

Farber, H. (1980) An Analysis of Final-Offer Arbitration. *Journal of Conflit Resolution,* **35.**

French, S. (1986) *Decision Theory: An introduction to the mathematics of rationality*, Ellis Horwood, Chichester.

Gibbons, R. (1993) *Un Primer Curso de Teoría de Juegos.* Antoni Bosch, ed.

Hannan, E.L. (1980) Nondominance in Goal Programming. *INFOR, Canadian Journal of Operational Research and Information Processing* **18**

Hume, D. (1739) *A Treatise of Human Nature.*

Ignizio, J. P. (1976) *Goal Programming and Extensions.* Lexington Books.

Klemperer, P. D. (2000) *Economic Theory of Auctions*, Edward Elgard, Massachusetts.

Klemperer, P. D. (2002) What Really Matters in Auction Design, *Journal of Economic Perspectives*

Klemperer, P. D. (2002) Why Every Economist Should Learn Some Auction Theory, in Dewatripont, M., Hansen, L, and Turnovsky, S. (eds.) *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications*, Eight world congress of the econometric society.

Lee, S. M. (1972) *Goal Programming for Decision Analysis.* Auerbach Publishers.

Keeney, R.L. and Raiffa, H. (1976) *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-Offs.* John Wiley and Sons.

Marglin, J.A. (1967) *Public Investment Criteria.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Myerson, Roger B. (2001) *Game Theory. Analysis of conflict.* Harvard University Press.

Nash, J (1950) Equilibrium Points in n-Person Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* **36**.

Neumann, J. von, and Morgenstern, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press.

Owen, G. (1995) *Game Theory. 3rd. Ed.* Academic Press.

Rasmusen, E. (1996) *Games and information. An introduction to game theory.* Blackwell. 2ª ed.

Ríos, S., M.J. Ríos-Insúa, S. Ríos-Insúa. (1989) *Procesos de Decisión Multicriterio.* Eudema.

Romero, C. (1991) *Handbook of Critical Issues in Goal Programming.* Pergamon Press.

Romero, C. (1993) *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones.* Alianza Universidad.

Saaty, T. L. (1977) A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures. *Journal of Mathematical Psychology,* **15,** 234-281.

Saaty, T.L. (1980) *The Analytic Hierarchy Process.* McGraw Hill

Selten, R. (1965) Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit. *Zeitshcrift für Gesamte Staatswissenschaft,* **121.**

Simon, H. A. (1955) A Behavioral Model of Rational Choice. *Quarterly Journal of Economics,* **69,** 99-118.

Stackelberg, H. von (1934) *Marktform und Gleichgewicht.* Springer.

Thomas, L.C. (1986) *Games, theory and applications.* Ellis Horwood, Chichester.

Yu, P.L. (1973) A Class of Solutions for Group Decision Problems. *Management Science,* **19,** 936-946.

Yu, P.L. (1985) *Multiple criteria decision making: Concepts, techniques and extensions.* Plenum, New York.

Zadeh, L.A. (1963) Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **8**, 59-60.

Zeleny, M. (1973) Compromise Programming, in *Multiple Criteria Decision Making* (Cochrane, J.L. and Zeleny, M. ed.). University of South Carolina Press, 262-301

Zeleny, M. (1974) A Concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal. *Computers and Operations Research,* **1,** 479-496.

Zeleny, M. (1982) *Multiple criteria decision making.* McGraw-Hill, New York.

I.6 Biblioteca de problemas

PROBLEMA 1

El vendedor de periódicos Chema Pamundi vende en la esquina de la Avenida de Roquetas y la Avenida de Aletas de la Frontera, y cada día debe determinar cuántos periódicos pedir. Chema compra a 100 céntimos de euro cada periódico y lo vende a 125. Los periódicos que no vende al final del día no tienen valor. Chema sabe que cada día puede vender entre 6 y 10 periódicos, siendo igual cada probabilidad. Dar la decisión óptima según cada uno de los criterios.

PROBLEMA 2

Una compañía ha diseñado un nuevo circuito integrado que le permitirá entrar en el mercado de los microordenadores si así lo desea. En otro caso, puede vender sus derechos por 80 millones. Si elige construir ordenadores, la rentabilidad de este proyecto depende de la habilidad de la compañía para comercializarlas durante el primer año. Tiene suficiente acceso a los distribuidores para asegurar la venta de 1000 ordenadores. Por otro lado, si tiene éxito puede llegar a vender hasta 10000 máquinas. La compañía piensa que ambas alternativas de venta son igualmente probables y que cualquier otra puede ignorarse. El coste de instalar la línea de producción es de 60 millones. La diferencia entre el precio de venta y el coste de cada ordenador es de 60000 euros. Determinar según los diferentes criterios cuál es la decisión óptima.

Supóngase ahora que se puede realizar un estudio de mercado a un coste de 40 millones para predecir cuál de los dos niveles de demanda es más probable que se dé. La experiencia indica que esta investigación de mercado es correcta dos tercios de las veces. Determinar la política óptima a seguir, según el criterio del valor medio.

PROBLEMA 3

Colaco tiene en la actualidad activos de 15 millones de euros y desea decidir si vende o no un refresco con sabor a chocolate, la Chocola. Colaco tiene tres opciones: 1) Probar en forma local el mercado de Chocola y, a continuación, usar los resultados del estudio de mercado para decidir si vende la Chocola a nivel nacional o no. 2) Directamente vender la Chocola a nivel nacional. 3) Decidir directamente no vender la Chocola.

A falta de un estudio de mercado, Colaco cree que Chocola tiene un 55% de posibilidades de éxito nacional, y 45% de fracaso absoluto. Si es un éxito nacional, el beneficio será de 30 millones y si es un fracaso, se perderán 10.

Si Colaco decide hacer el estudio previo a un coste de 3 millones, hay un 60% de posibilidades de que sea un éxito local y un 40% de fracaso local. Si obtiene éxito local hay un 85% de posibilidades de que Chocola sea éxito nacional. Si se obtiene un fracaso local hay sólo un 10% de que Chocola sea éxito nacional. Si Chocola es neutral respecto a riesgos, ¿qué estrategia debe seguir? ¿Y si Colaco valora sus ganancias de forma no lineal asignando las siguientes utilidades: u(45 millones)=1, u(42 millones)=.99, u(22.6 millones)=.6649, u(15 millones)=.48, u(12 millones)=.40, u(5 millones)=.19 y u(2 millones)=0?

PROBLEMA 4

Una compañía es dueña de unos terrenos en los que puede haber petróleo. Un geólogo consultor ha informado a la gerencia que piensa que existe una posibilidad de 1 entre 4 de encontrar petróleo. Debido a esta posibilidad, otra compañía petrolera ha ofrecido comprar las tierras por 9 millones de euros. Sin embargo, la compañía está considerando conservarla para perforar ella misma. Si encuentra petróleo, espera ganar aproximadamente 70 millones, pero perderá 10 si el pozo está seco.

1. Dar la decisión óptima según los distintos criterios de decisión. Para el criterio de Hurwicz determinar el grado de optimismo que separa cada una de las decisiones. ¿Cuál darías como solución si sabes que la empresa está operando con poco capital y la pérdida de 10 millones resulta importante?
2. A la empresa, se le ofrece una opción anterior a tomar una decisión que consiste en llevar a cabo una exploración sísmica detallada en el área para obtener una mejor estimación de la probabilidad de encontrar petróleo, y cuyo coste es de 3 millones. Se sabe que éste sondeo cuando hay petróleo lo predice correctamente seis de cada 10 veces, mientras que si no lo hay, acierta 8 de cada 10.

   Dar la política óptima de estas decisiones, y dar el beneficio esperado de esa política.
3. Dado que hay problemas de capital, se observa que la pérdida de 10 millones, y otros 3 si se encargó el sondeo previo, puede resultar muy grave para la empresa. Por ello se plantea la posibilidad de sustituir los beneficios/costes reales por utilidades de éstos. El dueño de la compañía da la siguiente tabla de utilidades:

Beneficio	-13	-10	6	9	67	70
Utilidad	-15	-10.5	6	9	58	60

Replantear el problema con estas decisiones.

4. Antes de llevar a cabo la política de decisiones, la empresa es vendida a un empresario con mayor aversión al riesgo que plantea una nueva tabla de utilidades:

Beneficio	-13	-10	6	9	67	70
Utilidad	-20	-13	6	9	44	45

¿Cuál será la decisión del nuevo dueño?

PROBLEMA 5

Hay dos restaurantes en competencia que tratan de determinar sus presupuestos de propaganda para el próximo año. Las ventas combinadas de los dos son de 240 millones de euros y pueden gastar 6 o 10 millones de euros en propaganda. Si uno de ellos gasta más que el otro, tendrá ventas de 190 millones de euros. Sin ambas empresas gastan lo mismo en propaganda, tendrán las mismas ventas. Cada 10 euros de venta les produce 1 de ganancia. Si cada restaurante busca maximizar la ganancia menos el gasto en propaganda, dar un punto de equilibrio para este juego y comentar la solución.

PROBLEMA 6

Estados Unidos y la Ex-Unión Soviética "estaban" enzarzados en la carrera armamentística. Supóngase que en un determinado momento cada nación tenía dos estrategias posibles: construir un nuevo misil o no hacerlo. El coste de construcción es de 10 unidades, y si una nación lo crea y la otra no, la que lo crea "recibe 20 unidades" y la que no lo crea "paga 100 unidades". Identificar un punto de equilibrio para este juego.

PROBLEMA 7

Una empresa electrónica japonesa y una americana del mismo ramo están pensando diseñar un superconductor. Si ambas compañías trabajan en el superconductor tendrán que compartir el mercado y cada compañía perder 10.000 millones de euros. Si sólo una trabaja en el superconductor, dicha empresa ganará 100.000 millones de euros. Desde luego, si ninguna trabaja en ello las ganancias de cada una serán de 0 euros. ¿Tiene algún punto de equilibrio este juego?

Supóngase ahora que el gobierno japonés ofrece a la empresa japonesa una subvención de 15.000 millones para crear el superconductor. ¿Tiene algún punto de equilibrio el juego?

PROBLEMA 8

En el horario de 8 a 9 p.m., dos cadenas televisivas compiten por la audiencia de 10 millones de espectadores. Las cadenas deben anunciar de forma simultánea el espectáculo que se emitirá en ese horario. Las elecciones posibles de cada cadena y el número de televidentes de la cadena 1, en cientos de miles, aparece en la siguiente tabla. Dar el valor del juego y las estrategias óptimas.

		Cadena 2	
Cadena 1	Película del Oeste	Telenovela	Comedia
Película del Oeste	35	15	60
Telenovela	45	58	50
Comedia	38	14	70

PROBLEMA 9

Mad Max desea viajar de Nueva York a Dallas por la ruta más corta posible. Puede viajar por las rutas que aparecen en la siguiente tabla. Desafortunadamente, la Bruja Maldita puede bloquear una carretera que salga de Atlanta y una que salga de Nashville. Mad Max no sabrá qué carreteras han sido bloqueadas hasta que llegue a Atlanta o a Nashville. ¿Debe ir Mad Max a Atlanta o a Nashville? ¿Qué rutas debe bloquear la Bruja Maldita?

Ruta	Longitud (km)
Nueva York -- Atlanta	800
Nueva York -- Nashville	900
Nashville -- St. Louis	400
Nashville -- Nueva Orleans	200
Atlanta -- St. Louis	300
Atlanta -- Nueva Orleans	600
St. Louis -- Dallas	500
Nueva Orleans -- Dallas	300

PROBLEMA 10

Dos empresas competidoras deben determinar de forma simultánea cuánto fabricar de un producto. La ganancia total de las dos empresas es siempre 1 millón de euros. Si la capacidad de producción de la empresa 1 es baja y la de la empresa 2 también, la utilidad de la empresa 1 será de 500 mil euros. Si la producción de la empresa 1 es baja y la de 2 es alta, las ganancias de la empresa 1 serán 400 mil euros. Si el nivel de producción de ambas empresas es alto la utilidad de la empresa 1 es de 600 mil euros, pero si la de 1 es alta y la de 2 es baja, la utilidad para la empresa 1 es de 300 mil euros. Determinar el valor y las estrategias óptimas para ese juego.

PROBLEMA 11

El sindicato y la gerencia de una compañía negocian el nuevo contrato colectivo. Por ahora las negociaciones están congeladas, pues la gerencia hace una oferta "final" de un aumento salarial de 110 centieuros por hora y el sindicato hace una demanda "final" de 160 centieuros por hora. Ambas partes han acordado que un árbitro imparcial establezca el aumento en alguna cantidad entre 110 y 160 centieuros por hora (inclusive).

El arbitraje ha pedido a cada lado que le presente una propuesta confidencial de un aumento salarial económicamente razonable y justo (redondeando de 10 en 10 centieuros). Por experiencias anteriores, ambas partes saben que el arbitraje casi siempre acepta la propuesta del lado que más cede respecto a su cantidad "final". Si ningún lado cambia su cantidad final o si ambos ceden en la misma cantidad, el arbitraje suele establecer una cifra a la mitad (135 en este caso).

Ahora cada parte necesita determinar qué aumento proponer para obtener un beneficio máximo. Formular este problema como un juego de suma nula y resolverlo.

PROBLEMA 12

Un total de 90.000 clientes acuden a los supermercados Superbarato y El Chollo. Para animar a los clientes a entrar, cada almacén regala un artículo. Cada semana, el artículo de regalo se anuncia en el periódico del lunes. Naturalmente, ninguno de los almacenes conoce qué artículo va a regalar el otro esa semana. Superbarato está pensando dar una caja de bebidas o 2 litros de leche. El Chollo está pensando regalar un paquete de mantequilla o 2 litros de zumo de naranja. Para cada elección de artículos, el número de clientes que entrarán al almacén Superbarato durante esa semana aparece en la siguiente tabla. Cada almacén desea elevar al máximo su número esperado de clientes durante esa semana. Determinar una estrategia óptima para cada supermercado y el valor del juego.

		El Chollo	
		Mantequilla	Zumo de naranja
Superbarato	Bebidas	40000	50000
	Leche	60000	30000

PROBLEMA 13

La dulce, frágil y rubia Caperucita lleva diariamente a su abuelita una bolsa de 50 pastelillos, ya que la pobre está enferma, es de suponer que de diabetes, de tanto pastelito. Pero en el camino puede encontrarse con “El Lobo”, apodo con que es conocido cierto individuo, feroz devorador de pastelitos y tortilla de patatas, que se dedica a quitar pastelitos a las mocosas de 10 a 30 años que se adentran en el bosque.

Para evitar tan indeseado encuentro Caperucita puede ir por un sendero llano o cruzando montes, y si así lo desea, puede hacerse acompañar por su novio, por una u otra ruta.

“El Lobo” puede hacer lo mismo (lo del sendero o el monte, no lo del novio) y puede ir a pie o en bicicleta (arriesgando los dientes si va por el monte). La cantidad de pastelillos que “El Lobo” puede llegar a capturar en las diversas situaciones posibles, se refleja en la tabla siguiente. La cantidad negativa que aparece se debe a que el novio de Caperucita, si bien un poco distraidillo, es una mala bestia de 120 kilos que parte piñones con los bíceps y que en esas circunstancias logra agarrar a “El Lobo” para después de convertirlo en “La Oveja” mediante una soberana paliza, aligerarle de lo que lleva en la mochila.

		Caperucita		
“El Lobo”	Sola por sendero	Sola por monte	Con novio por sendero	Con novio por monte
En bici por sendero	10	0	5	0
En bici por monte	0	5	0	40
A pie por sendero	30	0	-20	0
A pie por monte	0	15	0	50

¿Cómo tienen que elegir sus rutas Caperucita y “El Lobo” para sacar el mayor partido de sus encuentros desde el punto de vista de tener la mayor cantidad de pastelitos? ¿Cuántos dulces por encuentro espera conseguir “El Lobo”?

PROBLEMA 14

Dos compañías comparten el grueso del mercado para cierto tipo de producto. Cada una está haciendo nuevos planes de comercialización para el próximo año con la intención de arrebatar parte de las ventas a la otra compañía (las ventas son más o menos fijas, así que se puede suponer que sólo se incrementan para una si disminuyen las de la otra). Cada una considera tres opciones: 1) un mejor empaquetado del producto, 2) un aumento en publicidad,

3) una pequeña reducción en el precio. Los costes de las tres opciones son comparables y lo suficientemente grandes como para que cada compañía elija sólo una. El efecto estimado de cada combinación de alternativas sobre el aumento en el porcentaje de las ventas para la compañía 1 sería del 4% si ambas compañías eligen la primera opción; del 3% si la compañía 2 elige la primera opción y la compañía 1 la tercera, o la compañía 2 elige la tercera y la compañía 1 la segunda opción; del 2% si la compañía 2 elige la segunda opción y la compañía 1 la primera o tercera opción; perdería un 2% si ambas eligen la tercera opción, y perdería un 3% si la compañía 2 elige su tercera opción y la compañía 1 su primera opción. En el resto de posibilidades los porcentajes del mercado no varían respecto a los actuales.

1. Plantear y resolver el juego matricial que se plantea para obtener las estrategias que deben seguir ambas compañías y la variación del porcentaje en las ventas que esperará cada compañía en caso de seguir esas estrategias.
2. Demostrar que el planteamiento de obtención de la estrategia óptima de la compañía l y el de la compañía 2 son problemas duales.

PROBLEMA 15

Dos jugadores deciden jugar al siguiente juego: el jugador 1 escribe un número entero entre 1 y 20 en una hoja de papel. Sin mostrar el papel al jugador 2, le dice lo que ha escrito. El jugador 1 puede mentir o decir la verdad. Entonces el jugador 2 debe adivinar si el jugador 1 ha dicho la verdad o no. Si descubre que es mentira el jugador 1 paga al jugador 2 mil euros. Si la acusación de mentir es falsa, el jugador 2 paga al 1 quinientas. Si el jugador 1 dice la verdad y el jugador 2 lo acierta, entonces el jugador 1 paga cien al jugador 2. Si el jugador 1 miente y el jugador 2 no lo adivina, entonces el jugador 2 paga quinientas al jugador 1.

1. Definir cuál es la estrategia de solución de un problema de este tipo
2. Determinar las estrategias de cada jugador, la matriz de pagos, el punto o puntos de equilibrio (si existen), el valor del juego (si existe), la estrategia óptima de cada jugador.

PROBLEMA 16

La empresa HeladoSA desea lanzar un nuevo producto al que permita introducirle en nuevos mercados. En la siguiente tabla se muestra los beneficios (o pérdidas en su caso) esperados de los tres productos candidatos dependiendo del impacto de la campaña publicitaria.

	Alto Impacto	Impacto Medio	Bajo Impacto
Chocolight	25	10	15
Chocochufa	15	15	15
Chocodisco	20	10	-10

Determine qué producto sacaría al mercado si aplica el criterio de Savage, el de Wald y el de Hurwicz (para los distintos valores de α).

PROBLEMA 17

Dos aerolíneas, AC y AP, se disputan el transporte aéreo de pasajeros, siendo un total de 40.000 pasajeros diarios. Las dos aerolíneas tienen varias opciones; la aerolínea AC puede poner vuelos en todo el territorio, en el centro y norte, o sólo en el norte. La aerolínea AP puede poner vuelos en todo el territorio o sólo en centro y sur. Los pasajeros que captaría la aerolínea AC según las estrategias a seguir se estiman así:

		Aerolínea AP	
		Todo territ.	Centro y Sur
	Todo territ.	15000	25000
Aerolínea AC	Norte	15000	20000
	Centro y Norte	20000	25000

1. Dar las estrategias óptimas y el valor del juego, e interpretarlos.
2. Ahora se le ofrece una nueva opción a la aerolínea AP, de modo que si ella implanta esta nueva opción y la aerolínea AC pone vuelos en todo el territorio, AC tendría 20.000 pasajeros; si AC pone vuelos sólo en el Norte, lograría 25.000 pasajeros, y si pone vuelos en Centro y Norte, lograría 18.000 pasajeros. ¿Cuál sería la nueva solución incluyendo ahora esta nueva estrategia de AP?

PROBLEMA 18

Hay un concurso de televisión que funciona como sigue: primero se me pregunta algo acerca de Stupid Videos. Si contesto bien gano 10000 euros. Creo tener una probabilidad de 0.8 de contestar bien esa pregunta. Si la contesto mal, se acabó y no gano nada. Si contesto bien me puedo quedar las 10000 euros o proseguir el juego y contestar alguna pregunta de Stupid TV Shows. Si contesto bien gano otras 30000 euros, pero si contesto mal pierdo lo anterior. Creo poder responder bien con una probabilidad de 0.6. Si la contesto bien, puedo irme con mi ganancia o proseguir y responder a una pregunta de Estadística. Si la contesto bien gano otras 50000 euros, pero si contesto mal pierdo todo lo anterior. La probabilidad de acertar esta pregunta es de 0.4. ¿Cómo puedo maximizar mi ganancia esperada y cuál es esta ganancia? Usar resultados de decisión.

PROBLEMA 19

Una empresa de suministros, "Sumis, S.A." desea analizar varias opciones de expansión de la empresa, fundamentalmente asociadas a su proceso productivo. Por una parte, tiene la opción de mejorar el material que está utilizando haciendo una fuerte inversión en investigación sobre materiales, logrando un mayor beneficio unitario posterior de los productos. Por otra parte, tiene la opción de ampliar la capacidad de producción haciendo una ampliación de la planta de producción ya existente. Además tiene otra posibilidad para ampliar la capacidad que consiste en abrir una nueva planta de producción. El presupuesto disponible no le permite abordar varias estrategias de expansión a la vez, de modo que ha de elegir una de las alternativas.

Por otra parte, las consecuencias derivadas de cada una de las decisiones son distintas según sea la coyuntura que rodee al momento de la expansión. Así, pueden darse distintos escenarios de demanda de los suministros en función fundamentalmente de lo que una empresa competidora, "Multi" pueda hacer. La otra empresa puede construir una nueva fábrica en el país, construir una nueva fábrica fuera del país, o no aumentar su producción.

Los beneficios que considera la empresa para cada una de sus opciones según se den las opciones de la otra empresa se recogen en la siguiente tabla, donde las filas representan las opciones de la empresa "Sumis, S.A." y los números su beneficio.

	Nueva fábrica en país	Nueva fábrica fuera de país	No hace nada
Nuevo material	10	-1	10
Amplía planta	0	3	10
Nueva planta	5	-2	6
No hace nada	-15	2	5

a) ¿Qué aconsejarías a la empresa "Sumis, S.A." hacer si las estrategias de la otra empresa son conocidas pero se desconoce absolutamente la valoración que esta empresa puede hacer de ellas, ya que además opera en otros mercados? ¿Cambiarías la opinión si supieras que las probabilidades de que la otra empresa lleve a cabo cada una de sus estrategias son de 0.1, 0.8 y 0.1, respectivamente? Justificar.

b) ¿Cuál sería la decisión si la tabla refleja las valoraciones de ambas empresas y no sólo la que hace "Sumis, S.A."? Justificar.
c) Supóngase que siendo la tabla las valoraciones que hacen ambas empresas, en realidad están en juego una serie de contratos futuros cuya cantidad asciende a 10 millones de euros, y que los valores reflejados en la tabla son los que recibiría la empresa "Sumis, S.A." en millones de euros, y el resto sería para la empresa "Multi". Por otra parte, la administración considera que las nueva inversiones en el país las va a subvencionar con 6 millones por la apertura de una nueva fábrica, y con 2 millones la inversión en nuevas tecnologías. ¿Cuál sería la solución? ¿Y si las subvenciones son de 2 millones por la apertura de una nueva fábrica y de 6 millones por la investigación en nuevas tecnologías?

Problema 20
Dado el planteamiento del ejemplo de Aranceles y Competencia Internacional Imperfecta, resolver si el coste de producción de una empresa es doble que el de la otra. Hacerlo si además el precio de venta es el doble en el país de producción más caro.

Problema 21
Obtener las estrategias en equilibrio para el planteamiento del duopolio de Cournot, pero con costes desiguales.

Problema 22
En un sistema de mercado, se dice que hay competencia perfecta si los jugadores disponen de información completa, y además ningún agente puede modificar los precios por sí mismo. Obviamente, el caso del duopolio de Cournot es un caso de competencia no perfecta o imperfecta. Analizar las estrategias en equilibrio en un planteamiento como el de Cournot, pero con n jugadores, y analizar cuál sería el precio resultante si el valor de n tiende a infinito, que sería el caso de competencia perfecta (que haya infinitos jugadores o que se pueda aproximar la situación a ésta).

Problema 23
Considérese un mercado en el que intervienen tres compañías. La demanda solicitada a cada una de las compañías resultará una función que depende de los precios que determinen todas ellas. La relación demanda-precio de cada producto es:

$$q_1 = \max\{0, 10 + p_3 - p_1\}$$
$$q_2 = \max\{0, 10 + p_3 - p_2\}$$
$$q_3 = \max\{0, 20 + p_1 + p_2 - 3p_3\}$$

Los costes de producción vamos a considerar que son todos iguales a cero.

a) Si los precios se determinan a la vez mediante subasta, ¿qué cantidad deberá producir cada una? ¿qué precio pondrá cada una al producto? ¿qué beneficio obtendrá cada una? ¿Cómo se modificaría la solución si fuera una única empresa que controla las tres unidades de oferta y pueden actuar conjuntamente?

b) Si los precios se determinan por las empresas haciendo público el nuevo precio, siendo la empresa 1 la primera que anuncia, luego la 2, y por último la 3, ¿qué cantidad deberá producir cada una? ¿qué precio pondrá cada una al producto?

c) ¿Cuál sería una estrategia disparador si se repitiera el proceso semanalmente?

d) Supóngase que pueden adoptar acuerdos entre ellas y repartir posteriormente la cantidad ganada, ¿qué cantidad debería llevarse cada una? ¿qué poder tienen en el mercado cada una de las empresas?

PROBLEMA 24

Dos empresas comparten el mercado de un cierto producto. Cada empresa tiene que decidir qué cantidad va a producir de ese producto, teniendo en cuenta que ambas tienen un coste de producción de 10€ por unidad. El precio de venta unitario del producto cambia según sea la oferta, siendo de 100€ menos la mitad del total producido. Responder:

a) Si la empresa 1 sólo se plantea producir 50 unidades o producir 80 unidades, y la empresa 2 sólo se plantea producir 60 unidades o producir 80 unidades, ¿cuál será la cantidad que debería producir cada una para maximizar sus beneficios?

b) Si pueden elegir cualquier cantidad de producción ¿cuál será la cantidad óptima que debe producir cada una de ellas?

PROBLEMA 25

El gestor de las líneas de ferrocarril de un país desea instalar un sistema de seguridad en una nueva línea férrea en construcción. Para ello ha recibido la oferta de 5 empresas. Cada una de las ofertas está compuesta por tres partes: la oferta técnica, la oferta económica y el plan de desarrollo. Cada oferta es evaluada por expertos, y tras un análisis en que se considera que la oferta de la

Empresa 5 no es viable, y sí las del resto, conceden una "puntuación" en cada una de las tres partes.

Se asigna una puntuación a cada parte y empresa, desestimando la mejor y la peor de las puntuaciones obtenidas, y haciendo la media de las otras. A continuación se muestra la tabla de puntuaciones asignadas:

	Oferta técnica	Oferta económica	Plan de desarrollo
Empresa 1	10	4	8
Empresa 2	6	9	5
Empresa 3	8	6	7
Empresa 4	7	7	9

El gestor ha de decidir a la vista de las puntuaciones obtenidas, qué empresa desarrollará el sistema. Suponiendo que las preferencias del gestor mantienen la relación lineal (es decir, una diferencia en un criterio de 10 a 8, es igual que de 8 a 6, por ejemplo), dar la opción en tres supuestos:

a) Los pesos asignados a los tres criterios son 0.4, 0.35 y 0.25, respectivamente

b) La matriz de comparación entre criterios es:

	O. Técnica	O. Económica	P. Desarrollo
O. Técnica	1	3	5
O. Económica	1/3	1	3
P. Desarrollo	1/5	1/3	1

c) Plantearlo con valoraciones propias de los criterios

Problema 26

La planificación energética se ha venido realizando tradicionalmente, en función de los costes del productor. Sin embargo, la asignación de recursos en base a este criterio no siempre es eficiente, ya que existen otros costes asociados a las distintas opciones, que no aparecen reflejados en el coste de generación.

Este es el caso de los costes medioambientales. La generación eléctrica conlleva unos impactos sobre el medio ambiente que, sin embargo, no son tenidos en cuenta a la hora de asignar eficientemente los recursos, desde un punto de vista social. Esta ineficiencia hace que la alteración del medio se siga produciendo, a pesar de la cada vez mayor sensibilización por parte de la opinión pública, sin que las fuerzas del mercado sean capaces de impedirlo.

Para evitar estas debilidades del mercado, es necesario introducir otros criterios para la toma de decisiones económicas. Una de las formas de hacerlo es la aplicación de la decisión multicriterio. Esta metodología presenta la ventaja de que no es necesario determinar un valor monetario para los impactos medioambientales. Su desventaja, sin embargo, radica en que esta heterogeneidad hace necesario analizar cada caso por separado, con la complejidad analítica que ello supone, lo que sería innecesario si todos los costes estuvieran medidos en las mismas unidades.

En este caso se presenta una planificación eléctrica muy simplificada, ya que ha sido necesario hacer supuestos, no siempre evidentes, para reducir la complejidad operativa. Esta simplificación se debe a que el objetivo buscado es simplemente mostrar cómo los resultados de una planificación eléctrica tradicional pueden verse alterados si se introducen otros criterios. La introducción de los costes medioambientales se ha hecho a través de una variable asociada, como las emisiones de CO2, ya que estas emisiones son un aspecto medioambiental de gran relevancia en la actualidad.

Se supone una demanda eléctrica anual de 150000 GWh, que puede ser satisfecha mediante el empleo de las siguientes fuentes de energía: carbón, energía nuclear, gas natural, energía eólica, biomasa procedente de cultivos energéticos, y energía hidráulica. El coste de generación, así como los costes medioambientales producidos deben ser mínimos.

Las posibilidades de utilización de cada una de las opciones están determinadas por el potencial existente, o por condicionantes de otro tipo, que se detallan a continuación:

- la energía nuclear está sujeta a una moratoria que impide la expansión de la potencia instalada, con una producción anual de 53000 GWh.
- respecto al gas natural, se supone una potencia máxima instalada de 1.835 MW, establecida por el Plan Energético Nacional. Suponiendo una utilización de 7.000 h al año, la producción potencial sería de 12.845 GWh.
- el potencial de la energía eólica en nuestro país ha sido evaluado en unos 2.000 MW, que, para una utilización media de 2.500 h, produciría un máximo de 5.000 GWh.
- los recursos de biomasa para producción energética han sido estimados en 22 Mtep, que equivaldrían a unos 40000 GWh de producción eléctrica.
- por último, se supone un potencial hidráulico de 31.755 GWh.

Estos supuestos simplifican bastante la operación del problema, aunque se ajustan bastante a la realidad. En primer lugar, se considera que toda la demanda debe ser satisfecha con estas opciones, sin tener en cuenta otras como el fuel-oil, la energía solar, la cogeneración, etc. En segundo lugar, la planificación se va a realizar en base a la producción, no a la potencia instalada.

Para ello se consideran unas horas de utilización determinadas, lo que en lógica, debería venir definido por la posterior optimización de los costes de generación, ya que es a partir de ésta cuando debe calcularse el tiempo de funcionamiento, y no antes. En cualquier caso, es de esperar que los supuestos no alteren demasiado el carácter ilustrativo de este ejercicio

Los costes de generación que se van a utilizar son costes medios aproximados de la generación eléctrica en España, para una utilización normal durante el año, según la planificación tradicional. En la tabla 1, aparecen los costes de generación, y emisiones de CO2 para las opciones consideradas. Para poder referirlas a la producción de electricidad, ambos vienen establecidos con relación al kWh generado. Hay que recordar que algunos costes son simplemente estimaciones. El coste del carbón corresponde al carbón importado.

Tabla 1. Costes y emisiones de CO_2 de la generación eléctrica

Fuentes de energía	**Coste (c€/kWh)**	**Emisiones de CO_2 (g/kWh)**
Carbón	5,85	1015
Nuclear	8,24	-
Gas natural	5,00	401
Eólica	9,00	-
Biomasa	12,00	-
Hidráulica	6,00	-

Las tecnologías consideradas para estimar las emisiones son, para el carbón, combustión con combustible pulverizado, para el gas natural, un ciclo combinado, y para la biomasa, combustión en lecho fluidizado. En este último caso, aunque hay emisiones de CO2 en la combustión, las emisiones netas se consideran nulas debido a la fijación previa del CO2 por los cultivos energéticos empleados para la producción de electricidad.

I.7 Resultados de la biblioteca de problemas

RESULTADO DEL PROBLEMA 1

Por el criterio del valor esperado, son indiferentes 6 y 7 periódicos, siendo el beneficio esperado de 150 centieuros.

Por el criterio de Wald, se piden 6 periódicos.

Por el criterio de Savage, son indiferentes 6 y 7 periódicos siendo 100 la pérdida.

Por el criterio de Hurwicz, para $\alpha < 0.8$ se piden 6 periódicos y para $\alpha > 0.8$ se piden 10 periódicos.

RESULTADO DEL PROBLEMA 2

Por el criterio del valor esperado, se elige construir con un beneficio esperado de 270 millones de euros.

Por el criterio de Wald, se venden los derechos.

Por el criterio de Savage, elige construir con una posible pérdida de 80 millones.

Por el criterio de Hurwicz, para $\alpha < 0.148$ se venden los derechos y para $\alpha > 0.148$ se construyen ordenadores.

Si tiene la posibilidad de encargar el estudio, al fin decide no encargarlo e invertir directamente, con el beneficio esperado de 270 millones.

RESULTADO DEL PROBLEMA 3

Colaco debe lanzar la nueva bebida a nivel nacional sin estudio local, siendo la cantidad esperada al final de sus activos de 27 millones de euros.

Sin embargo, si emplea las utilidades, debe encargar el estudio local, y si resulta un éxito local lanzarlo a nivel nacional, y si no, no lanzarlo. La utilidad esperada en este caso es .6649.

RESULTADO DEL PROBLEMA 4

1. Por el criterio del valor esperado, debe perforar esperando ganar 10 millones.
   Por el criterio de Wald, decide vender los terrenos.
   Por el criterio de Savage, decide perforar siendo el coste de oportunidad de 19 millones.
   Por el criterio de Hurwicz, para $\alpha < 0.2375$ vende los terrenos y para $\alpha > 0.2375$ decide perforar.
2. Decide hacer el sondeo previo y si resulta favorable perforar, y si no, vender, esperando ganar 12.3 millones.

3. Decide seguir la misma estrategia, aunque ahora su utilidad es de 10.65.
   El nuevo dueño, decide vender recibiendo los 9 millones.

Resultado del problema 5

Los dos restaurantes gastan el máximo en propaganda para defender su cuota en las ventas (obviamente, si llegaran a un acuerdo les sería más rentable a ambos, es la diferencia entre cooperar haciendo coaliciones y no intercambiar información).

Resultado del problema 6

Ambos deciden construir el misil, lo que provoca la escalada en la carrera de armamento.

Resultado del problema 7

No hay solución, hay dos estrategias en equilibrio pero con diferentes pagos, lo que hace que no sean solución (las dos son que uno construya y otro no, con pagos (0,100) o (100,0)). Sin embargo, si el gobierno japonés subvenciona a la empresa de su país, sí hay solución, Japón construye (lo que aumenta sus exportaciones) y EEUU no.

Resultado del problema 8

Hay un par de estrategias puras en equilibrio: la cadena 1 pone una telenovela, y la 2 una película del oeste. La primera cadena tendrá 4.5 millones de espectadores, y la 2 tendrá 5.5 millones.

Resultado del problema 9

Hay un par de estrategias puras en equilibrio: Mad Max va a Atlanta, y la Bruja Maldita debe cortar de Atlanta a St. Louis y de Nashville a Nueva Orleans. El valor del juego (distancia a recorrer por Mad Max) es 1700 kilómetros.

Resultado del problema 10

La empresa 1 tiene como estrategia óptima (0.25,0.75) siendo la primera opción una producción alta y la segunda baja. La segunda empresa, sin embargo, tiene como estrategia (0.5,0.5). El valor del juego es, si fuera de suma nula, 450, es decir, para la primera empresa de 450 mil euros y para la segunda de 550 mil.

Resultado del problema 11

Como juego de suma nula considerar 135 (el punto medio) y para cada cantidad que se fijaría restarle 135, siendo éste el pago para el sindicato. El resultado de la negociación es que el sindicato debe proponer 140 centieuros y la gerencia 130, siendo el valor del juego 0, es decir, se fija en 135.

Resultado del problema 12

El supermercado Superbarato debe regalar las bebidas un 75% de las semanas, y la leche un 25%. El Chollo debe regalar la mitad de las semanas mantequilla y la otra mitad zumo. Cada uno espera lograr 45.000 clientes.

Resultado del problema 13

Caperucita debe ir sola por el monte un 25% de las veces y con su novio por el sendero un 75%. "El Lobo" por su parte, debe ir un 75% de las veces por el sendero en bicicleta, y un 25% por el monte a pie. De esta forma el lobo espera conseguir 3.75 pastelillos diarios.

Resultado del problema 14

La compañía 1 ha de elegir su segunda estrategia 4 de cada 7 veces y la tercera 3 de cada 7 veces. La compañía 2 ha de elegir 5 de cada 7 su segunda opción y 2 de cada 7 la tercera. El valor esperado es de 0.857 para la primera compañía.

Resultado del problema 15

1.
2. La estrategia óptima del primer jugador es (Mentir, Decir Verdad)=(6/31, 25/31), y la del segundo jugador es (Decir que es mentira, Decir que es verdad)=(6/31,25/31). El valor del juego es 500/31.

Resultado del problema 16

Según el criterio de Wald, sacará Chocochufa; según el de Savage, sacará Chocolight; y según el criterio de Hurwicz, para $\alpha < 1/3$ será Chocochufa, y para $\alpha > 1/3$ será Chocolight.

Resultado del problema 17

1. La aerolínea AC debe poner vuelos en Centro y Norte, y la aerolínea AP en Todo el Territorio.
2. La solución para AP es poner vuelos en Todo el Territorio con probabilidad 7/12, y en la nueva opción con probabilidad 5/12. Para AC la solución es Norte con probabilidad 2/12, y Centro y Norte con probabilidad 10/12. El valor esperado es de 19166.6666 pasajeros para AC y el resto para AP.

Resultado del problema 18

La ganancia esperada máxima es 19200 euros, decidiendo responder la primera pregunta, si la acierto responder la segunda, y después de ésta, en ningún caso continuar.

Resultado del problema 25

a) Puntuaciones de las ofertas de las empresas: 7.4, 6.8, 7.05 y 7.5. Se elegiría la oferta de la Empresa 4

b) Pesos obtenidos mediante metas para los criterios: 0.65, 0.22 y 0.13, con una desviación del segundo criterio respecto al tercero de 0.174. Con estos pesos las puntuaciones de las ofertas de las empresas son: 8.42, 6.53, 7.43 y 7.26. Se elegiría la oferta de la Empresa 1.