

Unidad 7

Rotación

Objetivos

- Analizar la relación que existe entre la velocidad y aceleración lineales con la velocidad y aceleración angulares en los movimientos de rotación.
- Aplicar la relación entre el cambio de energía cinética y el trabajo para describir el movimiento rotacional de un cuerpo.
- Aplicar la relación entre momento, aceleración e impulso angulares en el análisis de movimientos rotacionales.
- Analizar el movimiento rotacional mediante la ley de conservación del momento angular.

Introducción

Se denomina rotación al movimiento que realiza un cuerpo cuando gira en torno a un eje que se mantiene fijo en el espacio. Dicho eje se denomina eje de rotación y puede ser real (una rueda de automóvil girando alrededor de su eje) o imaginario (el eje de rotación terrestre), lo cual se muestra en la figura 7.1.

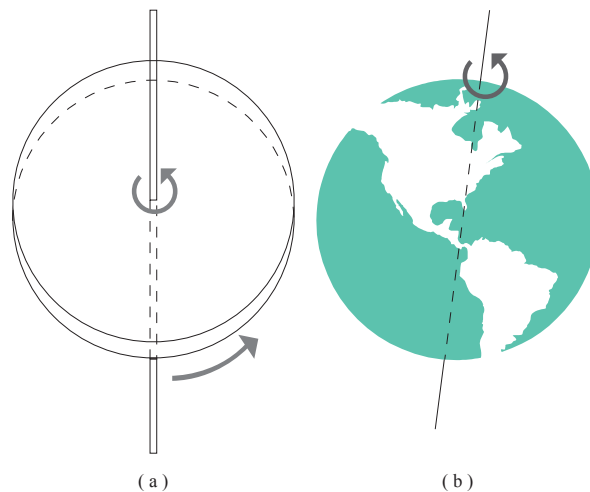


Figura 7.1. En la figura (a) se muestra una rueda girando alrededor de un eje real.

La figura (b) muestra el eje imaginario alrededor del cual gira nuestro planeta.

Considerando que el cuerpo está formado por partículas individuales, las trayectorias que siguen dichas partículas corresponden a círculos inscritos en planos perpendiculares al eje de rotación. El radio de cada trayectoria circular es mayor entre más alejada esté la partícula del eje de rotación y viceversa. Las partículas individuales que están sobre el eje de rotación, permanecen fijas mientras el cuerpo gira. Lo anterior puede apreciarse en la figura 7.2.

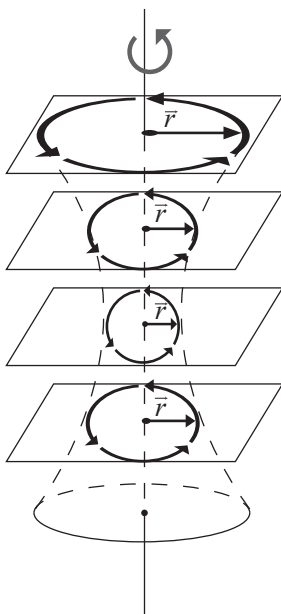


Figura 7.2. Rotación de un cuerpo alrededor de un eje que permanece fijo en el espacio.

Un objeto en el que todas sus partículas mantienen una distancia fija una de otra recibe el nombre de cuerpo rígido y su movimiento global de rotación (desplazamiento, velocidad y aceleración) se puede analizar en términos de la suma de los movimientos de cada una de ellas.

7.1. Velocidad angular y velocidad lineal

Considere un cuerpo girando alrededor del eje z , el cual es perpendicular al plano xy ; como se muestra en la figura 7.3, se puede establecer lo siguiente:

1. La posición angular de una partícula situada en el punto P , en un instante t_1 , es un ángulo θ_1 formado por el vector de posición $\vec{r}_1$ y el eje x , el cual se considera como el eje de referencia.

2. Si la partícula situada inicialmente en el punto P se desplaza hasta el punto Q en un instante t_2 , la posición angular cambia y ahora es un ángulo θ_2 formado por el vector de posición $\vec{r}_2$ y el eje x .

3. El desplazamiento angular de la partícula se define como: $\Delta\vec{\theta} = \theta_2 - \theta_1$ y ocurre en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$. La magnitud del desplazamiento angular se mide en radianes. Las siguientes relaciones permiten transformar grados a radianes:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 1 \text{ rev} \quad \text{o} \quad \pi \text{ rad} = 180^\circ = \frac{1}{2} \text{ rev}$$

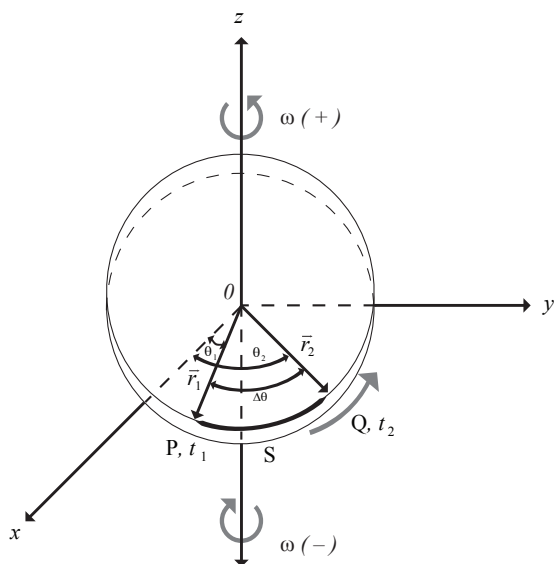


Figura 7.3. Determinación gráfica del desplazamiento angular $\Delta\theta$, el cual ocurre en el intervalo de tiempo Δt .
Nótese la diferencia gráfica y conceptual del desplazamiento angular y del arco de desplazamiento.

Cabe señalar que todas las partículas del cuerpo tienen el mismo desplazamiento angular, independientemente de su distancia al eje de rotación. Por consiguiente, se puede hablar del desplazamiento angular del cuerpo.

4. Con base en lo anterior, se puede definir la velocidad angular media $\bar{\omega}$ como:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \quad (7.1)$$

Asimismo, se puede definir la velocidad angular instantánea $\bar{\omega}$ como velocidad angular simplemente. La magnitud de ese vector se puede calcular como:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (7.2)$$

5. Las ecuaciones anteriores nos dicen que la velocidad angular mide la razón de cambio de la posición angular con respecto al tiempo. Sus unidades se expresan en $[\text{rad/s}]$ o $[\text{s}^{-1}]$.

6. La velocidad angular es un vector que se encuentra sobre el eje de rotación. Es decir, en el eje Z, el cual es perpendicular al plano xy. Si el giro es antihorario, ω es positiva (como un tornillo que sale del plano xy); si el giro es horario, ω es negativa (como un tornillo que entra al plano xy). En este capítulo se usa esta convención para la resolución de problemas.

7. Durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ la partícula recorre un arco de desplazamientos, cuya magnitud depende de su distancia al eje de giro y se encuentra sobre el plano xy.

Dicho arco de desplazamiento se mide en metros y se calcula mediante la relación: $s = r \Delta\theta$. De esta manera, las partículas más alejadas del eje de rotación recorren distancias mayores que las partículas más cercanas al mismo, aunque todas ellas tengan el mismo desplazamiento angular $\Delta\theta$.

Suponiendo ahora que una partícula de un cuerpo se encuentra girando con velocidad angular $\vec{\omega}$ en un instante t . Dicha partícula tiene una velocidad lineal $\vec{v}$, la cual se encuentra en el plano xy , es tangente a la trayectoria circular descrita por el giro de la partícula y perpendicular al radio del círculo en todo momento, como se muestra en la figura 7.4.

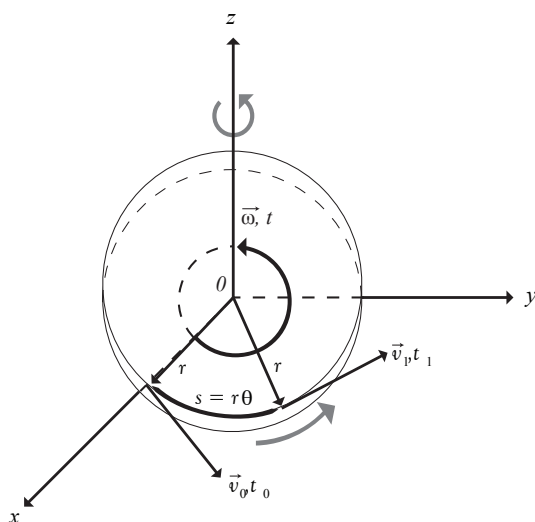


Figura 7.4. Relación existente entre la velocidad angular ω y la velocidad lineal v para todo movimiento de rotación.

Considerando que en $t = 0$ la partícula parte del eje x positivo, se observa que el arco de desplazamiento o distancia recorrida por la partícula en un tiempo t es: $s = r \theta$, donde r es de valor constante.

Si derivamos s con respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{lo cual queda como: } v = r \omega, \quad (7.3)$$

donde: v es la magnitud de la velocidad tangencial en m/s, ω la magnitud de la velocidad angular en rad/s y r es el radio de la trayectoria en m. Esta última ecuación nos permite conocer la relación existente entre la velocidad lineal que ocurre en el plano xy y la velocidad angular que ocurre en el eje z , que es perpendicular al plano mencionado.

7.2. Aceleración angular y aceleración lineal

Consideremos ahora que una partícula del cuerpo mostrado en la figura 7.5 tiene en el punto P una velocidad angular inicial ω_1 en el instante t_1 y que en el punto Q cambió su velocidad angular a ω_2 en el instante t_2 .

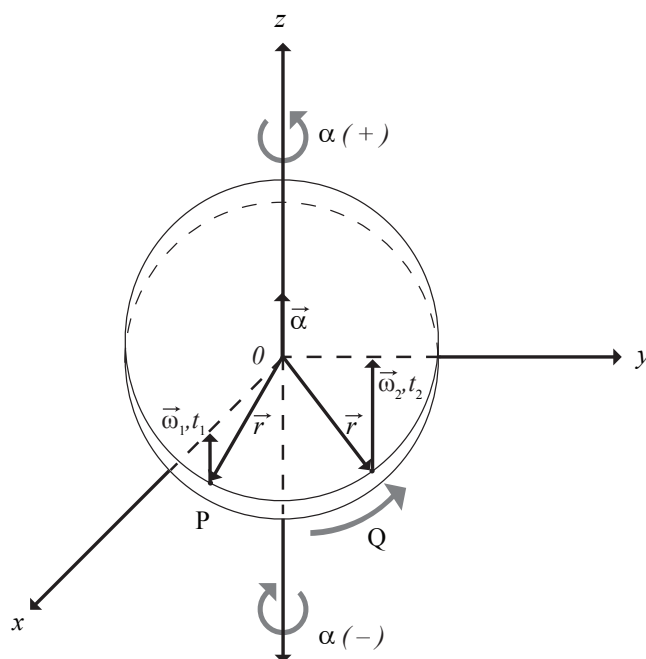


Figura 7.5. Esquema que muestra las condiciones necesarias para definir la aceleración angular.

De manera análoga al procedimiento usado para deducir las ecuaciones de velocidad angular, se puede definir que la aceleración angular media $\bar{\alpha}$ del cuerpo es:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad (7.4)$$

De igual forma, podemos definir la magnitud de la aceleración angular instantánea o la aceleración angular simplemente como:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (7.5)$$

Las ecuaciones anteriores indican que la aceleración angular mide la razón de cambio de la velocidad angular con respecto al tiempo. Sus unidades se expresan en $[\text{rad/s}^2]$ o $[\text{s}^{-2}]$.

La aceleración angular también es un vector que se encuentra sobre el eje de rotación. Es decir, en el eje z, el cual es perpendicular al plano xy. La aceleración angular es positiva cuando ω crece en el tiempo y negativa cuando ω decrece en el tiempo.

Si una partícula de un cuerpo se encuentra girando con velocidad angular ω en un intervalo de tiempo Δt , dicha partícula tiene una aceleración lineal a_t llamada aceleración tangencial, esta aceleración existe cuando la velocidad cambia su magnitud en función del tiempo, la cual se encuentra en el plano xy y es tangente a la trayectoria circular descrita por el giro de la partícula, lo cual se aprecia en la figura 7.6.

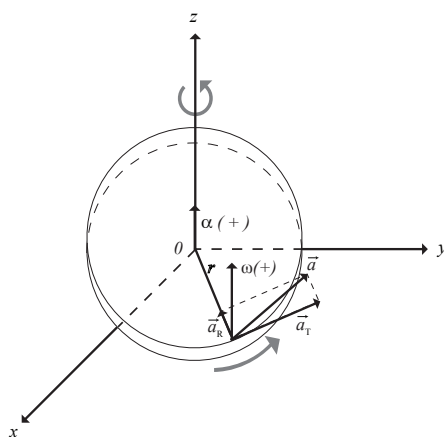


Figura 7.6. Relación existente entre la aceleración angular $\vec{\alpha}$, la aceleración tangencial $\vec{a}_T$, la aceleración centrípeta o radial $\vec{a}_R$ y la aceleración lineal total $\vec{a}$ para todo movimiento de rotación.

Se conoce que la derivada de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración y si se considera la relación entre velocidad lineal y velocidad angular $v = r \omega$, derivando la velocidad con respecto al tiempo tenemos:

$$v = r \omega;$$

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \quad \frac{dv}{dt} = a \text{ y de acuerdo con la ecuación 7.5}$$

$$a_T = r \alpha \quad (7.6)$$

donde: a_T es la magnitud de la aceleración tangencial en m/s^2 , α es la magnitud de la aceleración angular en rad/s^2 y r el radio de la trayectoria en m.

Los objetos con movimiento rectilíneo uniforme tienen una velocidad constante. Sin embargo, un objeto que se mueva en un arco con velocidad constante sufre un continuo cambio en la dirección del movimiento. Dado que la velocidad es un vector con módulo, dirección y sentido, un cambio en la dirección implica una velocidad variante. Este cambio de velocidad es la aceleración centrípeta a_C (radial). Derivando el vector de velocidad obtenemos la dirección de esta aceleración hacia el centro del círculo, como se muestra en la figura 7.7.

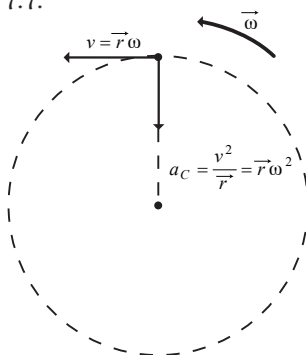


Figura 7.7.

Por lo tanto, la magnitud de la aceleración centrípeta está dada por:

$$a_C = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (7.7)$$

La aceleración tangencial $\vec{a}_T$ y la aceleración centrípeta $\vec{a}_C$ en un movimiento circular no uniforme representan dos vectores mutuamente perpendiculares como se muestra en la figura 7.8, que definen una aceleración total dada por:

$$a = \sqrt{(a_T)^2 + (a_C)^2} \quad (7.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.6) y (7.7) en (7.8) se tiene:

$$a = \sqrt{(a_T)^2 + (a_C)^2} = \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad (7.9)$$

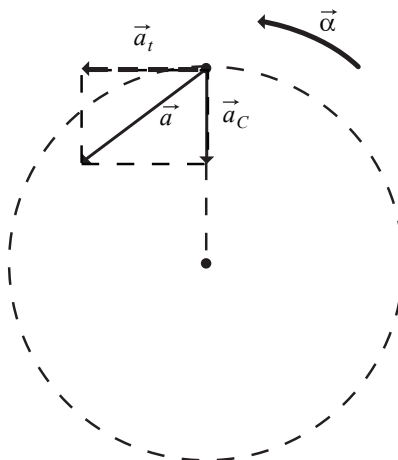


Figura 7.8.

7.3. Aceleración angular constante

El movimiento con aceleración angular constante ($\alpha = \text{constante}$) o Movimiento Circular Uniformemente Acelerado (MCUA), representa un caso especial relevante del movimiento de rotación. Este movimiento es el que ocurre al encender algún aparato giratorio mientras alcanza su velocidad angular final, o bien cuando algún aparato girando con velocidad determinada se apaga y llega al reposo después de un determinado tiempo.

Las ecuaciones cinemáticas de este tipo de movimiento son las mismas del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA), sustituyendo el desplazamiento lineal x por el desplazamiento angular θ , la velocidad lineal v por la velocidad angular ω y la aceleración lineal a por la aceleración angular α . Por lo tanto, las ecuaciones del Movimiento Circular Uniformemente Acelerado (MCUA) quedan de la siguiente manera:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad (7.10)$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad (7.11)$$

$$\theta = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (7.12)$$

$$\theta_f - \theta_i = \left(\frac{\omega_i + \omega_f}{2} \right) t \quad (7.13)$$

donde: θ_i y θ_f son las posiciones angulares inicial y final respectivamente, en rad; ω_i y ω_f son las magnitudes de las velocidades angulares inicial y final, en rad/s y α es la magnitud de la aceleración angular, en rad/s².

Problemas resueltos

1. Un taladro automático es utilizado en una ensambladora para introducir tornillos metálicos en las tuercas fijas de un motor. Cada tornillo tiene 7.6 vueltas/cm, 7.5 cm de longitud y 1.5 cm de diámetro. Si el taladro con el tornillo gira a razón de 350 rpm, ¿cuánto tiempo tarda cada tornillo en ser ensamblado totalmente en una tuerca?

Respuesta:

Si el taladro está girando con velocidad angular constante, entonces:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \text{despejando } t: \quad t = \frac{\theta}{\omega}$$

Pero el número total de vueltas que tiene cada tornillo es:

$$\theta = \left(7.6 \frac{\text{vueltas}}{\text{cm}} \right) (7.5 \text{ cm}) = 57 \text{ vueltas}$$

$$\text{Por lo tanto: } (350 \text{ rpm}) = 350 \left(\frac{\text{vueltas}}{\text{min}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 5.833 \frac{\text{vueltas}}{\text{s}}$$

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{57 \frac{\text{vueltas}}{1}}{5.833 \frac{\text{vueltas}}{\text{s}}} = 9.77 \text{ s}$$

2. El plato giratorio de un horno de microondas parte del reposo en $t = 0$ al ser encendido tal aparato. Cuando han transcurrido 3 segundos la velocidad angular es de 4.5 rad/s. Pasados 15 segundos el plato giratorio alcanza una velocidad angular constante. ¿Cuál es el ángulo que ha girado el plato desde $t = 0$ hasta $t = 35 \text{ s}$?, ¿cuántas vueltas ha dado el plato en ese intervalo de tiempo?

Respuesta:

Este problema tiene una parte de MCUA, desde $t = 0$ s hasta $t = 15$ s y la otra parte es un MCU, desde $t = 15$ s hasta $t = 35$ s.

La primera parte establece que el plato giratorio del microondas parte del reposo. Cuando el tiempo $t = 3$ s, la velocidad angular es $\omega = 4.5$ rad/s. Por lo tanto de la ecuación 7.10: $\omega_f = \omega_i + \alpha t$ despejando α :

$$\alpha = (\omega_f - \omega_i) / t = (4.5 \text{ rad/s} - 0 \text{ rad/s}) / 3 \text{ s} = 1.5 \text{ rad/s}^2$$

Por consiguiente, el ángulo recorrido desde $t = 0$ hasta $t = 15$ es de acuerdo con la ecuación 7.12:

$$\theta = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \text{ pero inicialmente } \theta_i = 0 \text{ y } \omega_i = 0.$$

$$\text{Entonces: } \theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} (1.5 \text{ rad/s}^2)(15 \text{ s})^2 = 168.75 \text{ rad} = \theta_1$$

La segunda parte establece que el plato giratorio deja de acelerarse a los 15 segundos, por lo que su movimiento se vuelve constante, es decir, deja de tener aceleración. Por lo tanto, la velocidad angular cuando $t = 15$ segundos es:

$$\omega = \alpha t = (1.5 \text{ rad/s}^2)(15 \text{ s}) = 22.5 \text{ rad/s}$$

Por tanto, el ángulo recorrido de manera constante, desde $t = 15$ s hasta $t = 35$ s es:

$$\theta = \omega t = (22.5 \text{ rad/s})(20 \text{ s}) = 450 \text{ rad} = \theta_2$$

Sumando ambos ángulos, θ_1 y θ_2 , se obtiene el ángulo total recorrido por el plato giratorio del microondas:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 168.75 \text{ rad} + 450 \text{ rad} = 618.75 \text{ rad}$$

Para calcular el número de vueltas que ha dado el plato giratorio en este intervalo de tiempo, desde $t = 0$ hasta $t = 35$ s, podemos usar la relación: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 1 \text{ rev}$

$$\text{Entonces: } 618.75 \text{ rad} / 2\pi \text{ rad} = 98.47 \text{ rev}$$

3. La rueda de una pulidora tiene un diámetro de 35 cm y está girando a 50 rpm cuando es apagada. Si tarda 15 segundos en detenerse, calcular la aceleración angular de dicha rueda, el número de vueltas que realiza antes de detenerse, así como la velocidad y las aceleraciones tangencial, centrípeta y total iniciales de un punto situado en el borde externo de la rueda.

Respuesta:

Como la rueda de la pulidora llega al reposo al ser apagada, podemos decir que su velocidad angular final es cero; es decir: $\omega_f = 0$. Usando la relación $2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 1 \text{ rev}$, se obtiene la velocidad angular inicial:

$$\omega_i = \left(50 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 5.23 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ahora se puede calcular la aceleración angular despejándola de la relación se emplea la ecuación 7.10.

$$\alpha = (\omega_f - \omega_i) / t = (0 \text{ rad/s} - 5.23 \text{ rad/s}) / 15 \text{ s} = -0.348 \text{ rad/s}^2$$

Despejando $(\theta_f - \theta_i)$ de la relación 7.11 podemos obtener el número de vueltas que realiza antes de detenerse.

$$\theta_f - \theta_i = (\omega_f^2 - \omega_i^2) / 2 \alpha = [(0 \text{ rad/s})^2 - (5.23 \text{ rad/s})^2] / [2 (-0.348 \text{ rad/s}^2)] = 35.61 \text{ rad}$$

Usando $2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 1 \text{ rev}$, se tiene:

$$\theta_f - \theta_i = 35.61 \text{ rad} / 2 \pi \text{ rev} = 5.66 \text{ rev}$$

Para resolver la segunda parte del problema, sabiendo que el diámetro de la rueda de la pulidora es de 35 cm, entonces su radio es $r = 17.5 \text{ cm}$. Usando las ecuaciones (7.3), (7.6), (7.7) y (7.8):

$$v_i = r \omega_i,$$

$$a_T = r \alpha,$$

$$a_c = r \omega_i^2$$

y $a = (a_T^2 + a_c^2)^{1/2}$ y sustituyendo valores:

$$v_i = r \omega_i = (0.175 \text{ m})(5.23 \text{ rad/s}) = 0.91 \text{ m/s}$$

$$a_T = r \alpha = (0.175 \text{ m})(-0.348 \text{ rad/s}^2) = -0.060 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = r \omega_i^2 = (0.175 \text{ m})(5.23 \text{ rad/s})^2 = 4.78 \text{ m/s}^2$$

$$a = (a_T^2 + a_c^2)^{1/2} = [(-0.060 \text{ m/s}^2)^2 + (4.78 \text{ m/s}^2)^2]^{1/2} = 4.78 \text{ m/s}^2$$

Observa que los radianes no son propiamente una unidad de medida y que $a = a_R$ debido a que a_T^2 es un número muy pequeño.

7.4. Energía cinética de rotación

Consideremos un cuerpo que gira en un eje z , perpendicular a un plano xy sobre el cual describe trayectorias circulares como se aprecia en la figura 7.9. Si el cuerpo gira con una velocidad angular ω , en un cierto instante t , la energía cinética del cuerpo en su conjunto es igual a la suma de las energías

cinéticas de cada una de las partículas de masa m del mismo. Si consideramos una partícula de masa m_i , situada a una distancia r_i del eje de rotación, esta partícula tiene una velocidad de magnitud $v_i = \omega r_i$.

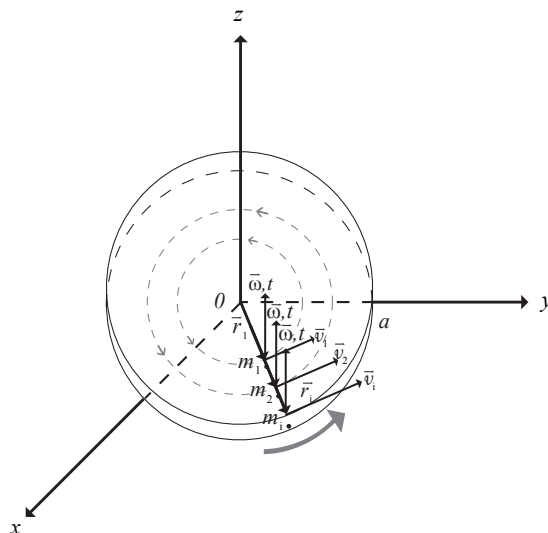


Figura 7.9. Diagrama en el que se muestra la energía cinética de rotación de una masa m_i , la cual forma parte de un cuerpo cuya energía cinética de rotación es la misma que la de esta masa.

Si la energía cinética se define como $E_K = \frac{1}{2} m v^2$, aplicando esta definición al cuerpo de la figura 7.9, obtenemos la energía cinética de rotación de la partícula de masa m_i :

$$E_{Ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$$

$$[J] = [kg \cdot m^2 / s^2 = (kg \cdot m / s^2)(m) = (N)(m) = J]$$

Por lo tanto, si sumamos la energía cinética de todas las masas m_i , obtenemos la energía cinética de rotación de todo el cuerpo, en donde la magnitud de la velocidad angular ω es la misma para todas las partículas del cuerpo:

$$E_K = \sum E_{Ki} = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2 \quad (7.14)$$

Sin embargo, cabe hacer notar que el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje, que representa la tendencia de un cuerpo a rotar, se define como:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (7.15)$$

que es el término que tenemos entre paréntesis en la ecuación (7.14), las unidades son $kg \cdot m^2$ en el SI. Si sustituimos este momento de inercia en dicha ecuación, obtenemos la ecuación de la energía cinética de rotación de un cuerpo que gira en torno a un eje fijo, con velocidad angular ω :

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (7.16)$$

Esta ecuación es totalmente análoga a la de la energía cinética de traslación $E_K = \frac{1}{2} m v^2$, donde se reemplaza la masa m por el momento de inercia I y la velocidad lineal v por la velocidad angular ω .

7.5. Trabajo y potencia en la rotación

Suponiendo que se tiene un cuerpo articulado con el eje z , el cual es perpendicular al plano xy . En un punto P de este cuerpo se aplica una fuerza $\vec{F}$, tal y como se observa en la figura 7.10, donde $\vec{r}$ es el vector de posición del punto P .

Al aplicar la fuerza $\vec{F}$ al punto P , el cuerpo gira un ángulo diferencial $d\theta$ en un tiempo dt , de manera que el punto P recorre un arco de desplazamiento ds . El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ al hacer girar al cuerpo un ángulo $d\theta$ se define como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos(90^\circ - \phi) ds = F \sin\phi \cdot ds = F ds \sin\phi \quad (7.17)$$

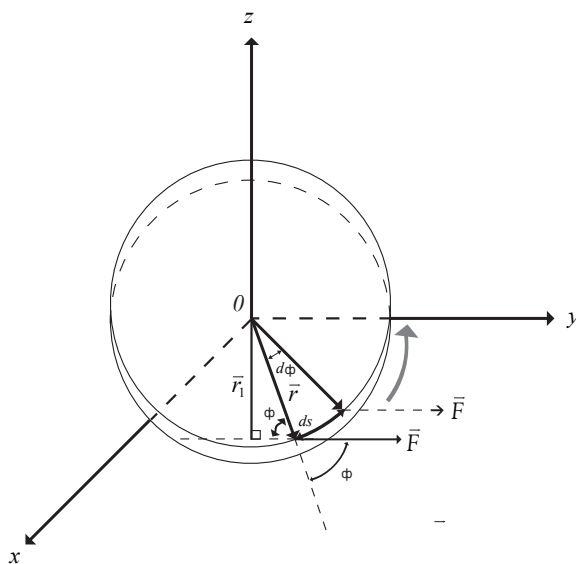


Figura 7.10. Descripción gráfica del trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ en un movimiento de rotación.

Pero se sabe que el arco de desplazamiento ds es: $ds = r d\theta$. Sustituyendo en la ecuación (7.17) se tiene que:

$$dW = F r d\theta \sin\phi \quad (7.18)$$

Esta ecuación (7.18) representa al diferencial del trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ en un movimiento de rotación.

El momento de una fuerza, también llamado torque, es un vector que se encuentra sobre un eje de giro perpendicular a un plano como se muestra en la figura 7.11. Un eje que pasa por el origen tiene articulado un cuerpo sobre el cual está actuando una fuerza $\vec{F}$ en el punto P , cuyo vector de posición es $\vec{r}$. El momento de la fuerza o torque con respecto al origen es un vector que se define como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (7.19)$$

Donde $r_{\perp}$ se denomina brazo de palanca de la fuerza $\vec{F}$. De la figura 7.10 también se puede observar que el momento $\vec{M}$ está sobre el eje de giro y por lo tanto es perpendicular al plano que contiene al vector de posición $\vec{r}$ y a la fuerza $\vec{F}$, ambos perpendiculares entre sí.

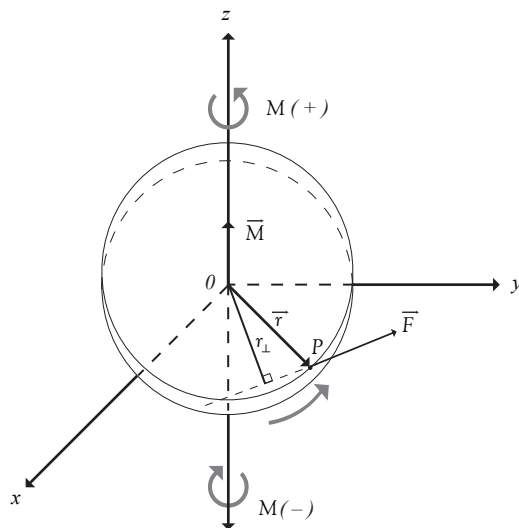


Figura 7.11 Representación gráfica del momento de una fuerza o torque.

Si se considera la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$, entonces $r_{\perp}$ es el brazo de palanca de dicha fuerza y su magnitud es:

$$r_{\perp} = r \sin\phi$$

Por consiguiente, el momento o torque de la fuerza $\vec{F}$ respecto al origen queda como:

$$M_0 = r \sin\phi F = r F \sin\phi \quad (7.20)$$

Las unidades del momento se miden en $[N \cdot m]$ y un torque es la medida de la tendencia de una fuerza $\vec{F}$ a imprimir a un cuerpo un movimiento de rotación alrededor de un eje perpendicular fijo. Si actúan sobre el cuerpo varias fuerzas al mismo tiempo, el momento resultante es igual a la suma de cada uno de los torques individuales.

Por convención se considera que si la tendencia del giro debido a la fuerza $\vec{F}$ es en sentido antihorario, entonces el momento M resultante es positivo (tornillo que sale). Si la tendencia del giro es en sentido horario, el momento M resultante es negativo (tornillo que entra).

Si se considera la definición de torque y se retoma la ecuación (7.18), ésta se puede reescribir como:

$$dW = M d\theta \quad (7.21)$$

La ecuación (7.21) representa también al diferencial del trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ en un movimiento de rotación.

Si dividimos el diferencial de trabajo y el diferencial de tiempo, obtenemos la potencia P en watts desarrollada por el momento M , lo cual se muestra en la ecuación (7.22):

$$P = dW / dt = M d\theta / dt = M \omega \quad (7.22)$$

Donde P es la potencia mecánica en watts (J/s); ω es la velocidad angular en rad/s desarrollada por el momento $\vec{M}$, en N • m.

Si el cuerpo rota desde una posición angular inicial θ_1 , hasta una posición angular final θ_2 y si el momento M es constante, entonces la expresión del trabajo total será:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (7.23)$$

Si el momento M permanece constante, la expresión matemática de la ecuación (7.24) se puede reescribir como:

$$W = M \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = M (\theta_2 - \theta_1) \quad (7.24)$$

Las ecuaciones anteriores son equivalentes a las del movimiento de traslación, cambiando la fuerza $\vec{F}$ por el momento $\vec{M}$, la posición x por la posición angular θ y la velocidad v por la velocidad angular ω .

En el movimiento rotacional también se cumple el teorema del trabajo y la energía cinética, el cual se escribe de la siguiente forma:

$$W = \Delta E_K = E_{Kf} - E_{Ki} = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 \quad (7.25)$$

Donde I es el momento de inercia del cuerpo en rotación.

7.6. Momento y aceleración angular

La segunda ley de Newton para la rotación relaciona el momento $\vec{M}$ con la aceleración angular $\vec{\alpha}$ de la manera que se describe a continuación:

Suponiendo que bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ una partícula de masa m gira en un círculo de radio r cuyo plano es perpendicular al eje de giro z , como se observa en la figura 7.12.

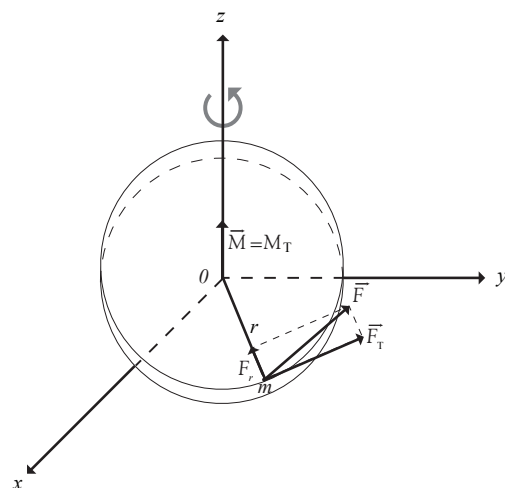


Figura 7.12. Diagrama que muestra la relación existente entre el momento $\vec{M}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$.

Aplicando la segunda ley de Newton se tiene que:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_C + \vec{a}_T) = m\vec{a}_C + m\vec{a}_T = \vec{F}_C + \vec{F}_T \quad (7.26)$$

Donde a_C y a_T , así como F_C y F_T son las componentes centrípeta y tangencial de la aceleración y la fuerza respectivamente.

También se puede deducir que el torque o momento τ producido por la fuerza $\vec{F}$ con respecto al centro del círculo es: $M = M_C + M_T$ que son torques debidos a las fuerzas centrípeta y tangencial respectivamente. Como la fuerza y el brazo de palanca son perpendiculares entre sí, podemos establecer que:

1. $M_R = 0$, puesto que el brazo de palanca de F_r es cero.
2. $M_T = F_T r = m a_T r$, puesto que el brazo de palanca de F_T es r .

Así, considerando el giro en sentido antihorario podemos decir que:

$$M = m a_T r = m (\alpha r) r = (m r^2) \alpha = I \alpha \quad (7.27)$$

donde $a_T = \alpha r$ (relación entre a y α) y $m r^2 = I$ (definición del momento de inercia). Por consiguiente, generalizando la ecuación anterior para un cuerpo rígido bajo la acción de una serie de fuerzas externas, se tiene que el momento resultante sobre el cuerpo es:

$$M = \sum M_{\text{ext}} = I \alpha \quad (7.28)$$

7.7. Momento angular e impulso angular

Suponiendo que tenemos una partícula de masa m , moviéndose con una velocidad v en el plano xy . Dicha partícula tiene un vector de posición $\vec{r}$, como se muestra en la figura 7.13.

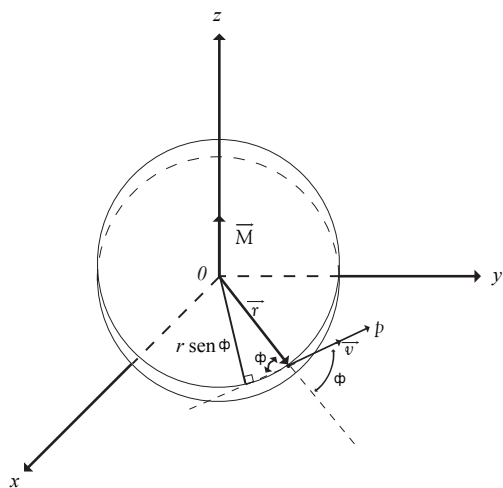


Figura 7.13. Representación esquemática del momento angular de una partícula de masa m , moviéndose en un plano con una velocidad v , localizada en la posición r .

El momento angular de una partícula con respecto al origen se define como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (7.29)$$

Donde L es un vector que se encuentra sobre el eje de giro, el cual es perpendicular al plano xy que contiene a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$.

De la ecuación (7.28) la condición que debe cumplirse para que L sea igual a $(r p)$ es que ambos deben ser perpendiculares entre sí. De la figura 7.12 se puede observar que:

$$L = (m v) r \sin\phi = p r \sin\phi \quad (7.30)$$

Donde ϕ es el ángulo que forman los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$; donde $r \sin\phi = r$, para que se cumpla la condición de perpendicularidad. Por lo tanto la expresión anterior queda como:

$$L = m v r$$

Pero la velocidad lineal y la velocidad angular están relacionadas por $v = r \omega$, por lo que:

$$L = m (r \omega) r = m r^2 \omega = (m r^2) \omega = I \omega \quad (7.31)$$

Por lo que el momento angular L es igual al producto del momento de inercia I por la velocidad angular ω . Las unidades de medida del vector momento angular de una partícula están expresadas en $[\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}]$.

El impulso angular se puede definir como el producto del momento de una fuerza $M = I \alpha$ por el tiempo t en que ésta actúa. Es decir, $M t = (I \alpha) t$. Este impulso es un vector cuya dirección y sentido son iguales al vector M . Analizando el módulo del momento angular L , se observa que éste y el impulso angular M son equivalentes en unidades:

$L = I \omega = (m r^2) \omega = [\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}]$ es el momento angular.

$M t = (I \alpha) t = (m r^2) \alpha t = [(\text{kg} \cdot \text{m}^2) (\text{rad} / \text{s}^2) (\text{s})] = [\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}]$ es el impulso angular.

De las dos relaciones anteriores se desprende que el impulso angular es equivalente al momento angular, es decir:

$$M t = L = I \omega \quad (7.32)$$

Retomando la definición de momento de una fuerza o torque $M = \vec{r} \times \vec{F}$ y sabiendo, de la segunda ley de Newton que:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7.33)$$

El momento de una fuerza se puede expresar como:

$$M = \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right) \quad (7.34)$$

Por otro lado, de la ecuación 7.29:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \vec{p} + \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

Como los vectores velocidad $\vec{v}$ y momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ son paralelos, su producto vectorial $\vec{v} \times \vec{p}$ es igual a cero. Además, el producto cruz entre el vector de posición $\vec{r}$ y la derivada del vector $\vec{p}$ con respecto al tiempo es igual al momento de la fuerza M , por lo que se tiene :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right) = M \quad (7.35)$$

De la ecuación anterior podemos concluir que el cambio del momento angular con respecto al tiempo en relación con un eje de rotación, es igual al momento neto con respecto a ese mismo eje.

7.8. Conservación del momento angular

Si en un sistema de partículas la suma de los momentos externos es igual a cero, se puede deducir que $dL / dt = 0$. Por lo tanto el vector momento angular $\vec{L}$ es constante, entonces $L_i = L_f$. Esta igualdad se conoce como el teorema de la conservación del momento angular y su enunciado es el siguiente:

“El momento angular total de un sistema de partículas no cambia en el tiempo con respecto a un punto o a un eje, si la resultante de los momentos externos que actúan sobre dicho sistema es igual a cero con respecto al mismo punto o a un eje.”

$$L_i = L_f \quad (7.36)$$

Problemas resueltos

1. Un tambor de radio r y masa m tiene enrollada una cuerda con un extremo libre y reposa sobre una superficie horizontal como se muestra en la figura 7.14. Se tira de la cuerda de masa despreciable con una fuerza tangencial F , de modo que la cuerda se desenrolla del tambor y éste rueda sin resbalar, aunque con fricción. Determinar la aceleración del tambor, así como la fuerza de fricción existente entre la superficie y el tambor.

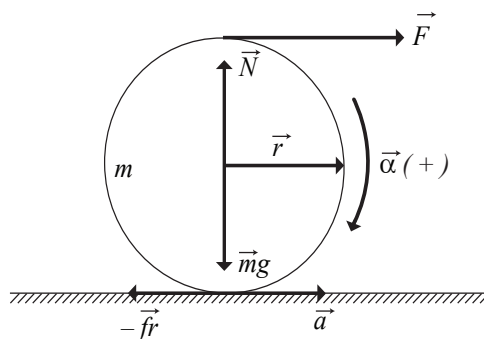


Figura 7.14.

Respuesta

Como este movimiento ocurre a lo largo del eje x , se puede decir que las ecuaciones del movimiento que se genera son:

$$\sum F_x = F - fr = m a \quad \sum F_y = N - m g = 0 \quad \text{y} \quad \sum M_c = Fr + fr r = I a = (mr^2 / 2) (a / r)$$

En la tercera expresión se han hecho dos sustituciones: una para el tambor uniforme y otra para el mismo tambor rodando sin resbalar. Dichas sustituciones son:

$$I = m r^2 / 2 \quad \text{y} \quad \alpha = a / r, \text{ lo cual hace que dicha expresión quede como: } F + fr = m a / 2$$

Sumando esta última expresión con la primera y despejando a , la aceleración del tambor es:

$$2 F = 3 m a / 2 \quad \text{entonces:} \\ a = 4 F / 3 m$$

Para encontrar la fuerza de fricción fr , sustituimos ésta última expresión en la primera:

$$F - fr = m a \quad \text{entonces} \\ F - fr = m (4F / 3m) \\ \text{despejando } fr: \quad fr = -F / 3$$

2. Sobre el borde de una plataforma circular que gira en un eje vertical sin fricción se encuentra parada una persona de masa $m = 90 \text{ kg}$. El radio de la plataforma es $r = 1.80 \text{ m}$ y su momento de inercia es $I = 750 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Inicialmente la plataforma está en reposo y la persona comienza a caminar sobre el borde en dirección antihoraria, con una velocidad $v = 1.7 \text{ m/s}$ con respecto al piso. Encontrar la velocidad angular ω que adquiere la plataforma cuando la persona comienza a caminar y el trabajo que realiza la persona al poner en movimiento a la plataforma.

Respuesta

Si la dirección es antihoraria, la velocidad angular ω es positiva y aplicando el principio de conservación del momento angular alrededor del eje de la plataforma se obtiene la expresión siguiente:

$L_i = L_f$ entonces: $0 = I_{\text{per}} \omega_{\text{per}} - I_{\text{plat}} \omega_{\text{plat}}$, puesto que inicialmente la plataforma se encuentra en reposo.

Utilizando la definición de momento de inercia ($I = m r^2$) y la relación de velocidad angular con velocidad lineal ($\omega = v / r$), la expresión anterior se transforma en:

$0 = (m r^2)(v / r) - I \omega_{\text{plat}}$ despejando ω_{plat} obtenemos la velocidad angular de la plataforma circular, en dirección contraria al movimiento de la persona:

$$\omega_{\text{plat}} = m r v / I = (90 \text{ kg})(1.80 \text{ m})(1.7 \text{ m/s}) / (750 \text{ kg}\cdot\text{m}^2) = 0.367 \text{ rad / s}$$

Para la segunda pregunta podemos utilizar el teorema del trabajo y la energía ($W = \Delta E_K$), así como la expresión de la energía cinética de rotación ($E_K = I \omega^2 / 2$):

$$W = E_{Kf} - E_{Ki} = m v^2 / 2 + I \omega_{\text{plat}}^2 / 2 \quad \text{sustituyendo valores queda:}$$

$$W = (90 \text{ kg})(1.7 \text{ m/s})^2 / 2 + (750 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(0.367 \text{ rad/s})^2 / 2 = 180.55 \text{ Joules}$$

3. Desde una distancia $d = 12 \text{ cm}$ se lanza un gel de masa $m = 20 \text{ g}$, con una velocidad $v = 275 \text{ m/s}$ contra un cilindro horizontal cuya masa es $m = 9 \text{ kg}$ y radio $r = 15 \text{ cm}$. El cilindro tiene la capacidad de girar libremente sobre su eje. La dirección del gel es perpendicular al eje de rotación del cilindro. El gel queda pegado al cilindro al chocar contra él. Determinar la velocidad angular ω del cilindro una vez que el gel queda pegado en su superficie, así como la energía que se pierde en la colisión.

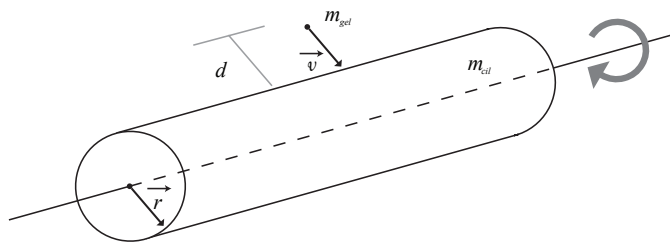


Figura 7.15.

Respuesta

A partir del principio de conservación del momento angular se puede decir que el momento angular L del conjunto gel-cilindro se conserva con respecto al eje del cilindro, es decir:

$$L_i = L_f \quad \text{entonces:} \quad m_{\text{gel}} v d = (I_{\text{gel}} + I_{\text{cil}}) \omega_{\text{gel-cil}} \quad \text{pero sabiendo que:}$$

$$I_{\text{gel}} = m_{\text{gel}} r_{\text{cil}}^2 \quad \text{y que:} \quad I_{\text{cil}} = m_{\text{cil}} r_{\text{cil}}^2 / 2 \quad \text{sustituyendo en la expresión anterior:}$$

$$m_{\text{gel}} v d = (m_{\text{gel}} r_{\text{cil}}^2 + m_{\text{cil}} r_{\text{cil}}^2 / 2) \omega_{\text{gel-cil}} \quad \text{despejando} \quad \omega_{\text{gel-cil}} \quad \text{y sustituyendo valores:}$$

$$\omega_{\text{gel-cil}} = m_{\text{gel}} v d / (m_{\text{gel}} + m_{\text{cil}} / 2) r_{\text{cil}}^2$$

$$\omega_{\text{gel-cil}} = [(0.02 \text{ kg})(275 \text{ m/s})(0.12 \text{ m})] / [(0.02 \text{ kg} + 9 \text{ kg} / 2)(0.15 \text{ m})^2] = 6.48 \text{ rad/s}$$

Problemas propuestos

1. Un carrusel circular parte del reposo y comienza a girar con aceleración angular constante de $\alpha = 5 \text{ rad/s}^2$ a lo largo de 4 segundos. En ese instante el carrusel es frenado y comienza a desacelerarse de manera constante hasta llegar al reposo después de haber dado 3 vueltas. Encontrar dicha desaceleración, así como el tiempo que tarda en llegar al reposo.

Respuesta: $t = 1.88 \text{ s}$ y $\alpha = 10.62 \text{ rad/s}^2$

2. Un proyectil de masa $m = 10 \text{ g}$ es disparado contra una barra rígida que gira libremente alrededor de un pivote central. La barra tiene una masa $m = 1 \text{ kg}$, una longitud $L = 1 \text{ m}$ y se encuentra encima de una plataforma horizontal. El proyectil sale con una velocidad inicial $v = 300 \text{ m/s}$ y después de atravesar la barra su velocidad disminuye a $v = 100 \text{ m/s}$, aunque conserva su dirección inicial. Si después de la colisión la barra hace dos giros completos antes de detenerse, calcular el momento neto que ejerce la plataforma horizontal sobre la barra, si el impacto ocurre a 40 cm del centro de la barra.

Respuesta: $M = 0.307 \text{ N}\cdot\text{m}$

3. La polea para sacar agua de un pozo tiene 20 cm de diámetro y tiene una soga enrollada. La superficie del agua se encuentra a 6 m de profundidad y se suelta una cubeta atada a la cuerda, la cual imprime a la polea una aceleración angular $\alpha = 1.5 \text{ rad/s}^2$. ¿Cuánto debe girar la polea para que la cubeta alcance la superficie del agua, suponiendo que tiene cuerda suficiente?, ¿cuánto tiempo tarda la cubeta en caer al agua?

Respuesta: $t = 8.96 \text{ s}$ y $\Delta\theta = 60 \text{ rad}$

4. El cabezal de un taladro se encuentra en reposo. Posteriormente se enciende y empieza a experimentar una aceleración angular de $\alpha = (5 + 4t) \text{ rad/s}^2$. Encontrar la velocidad angular ω cuando han transcurrido 4 segundos y el ángulo girado en ese mismo tiempo.

Respuesta: $\theta = 82.68 \text{ rad}$ y $\omega = 52.10 \text{ rad/s}$

5. Una máquina de combustión interna cuya masa es $m = 70 \text{ kg}$ se encuentra sobre una plataforma giratoria horizontal en reposo, justo en el borde. La plataforma giratoria tiene una masa $m = 100 \text{ kg}$ y un radio $r = 4 \text{ m}$. En cierto instante, la máquina arroja por el escape una masa de desechos $m = 1.5 \text{ kg}$, con una velocidad $v = 8 \text{ m/s}$ en dirección tangente al borde de la plataforma. Obtener la velocidad v que la máquina adquiere al arrojar los desechos, si la plataforma tienen un momento de inercia $I = m r^2 / 2$.

Respuesta: $v = 0.10 \text{ m/s}$

6. Un corredor de masa $m = 60$ kg se encuentra en posición de arranque sobre el borde de una plataforma giratoria en reposo la cual tiene 6.0 m de diámetro y un momento de inercia $I = 1,800$ kg·m². El corredor empieza su carrera con una velocidad $v = 4$ m/s. Encontrar el trabajo W realizado por el corredor para poner a girar la plataforma con el corredor encima de ella y la velocidad angular ω que adquiere dicha plataforma.

Respuesta: $W = 369.23$ J y $\omega = 0.309$ rad/s

7. En la figura 7.16, la masa $m_1 = 3$ kg y la masa $m_2 = 1$ kg. La polea tiene un radio R , una masa m y un momento de inercia $I = 0.80$ m R². El ángulo es $\theta = 60^\circ$ y no hay fricción en el sistema. El conjunto se encuentra en reposo y de pronto se suelta cuando la masa m_1 se encuentra a una distancia h del piso. Determinar la velocidad v de m_1 , en términos de h , justo antes de que choque contra el piso.

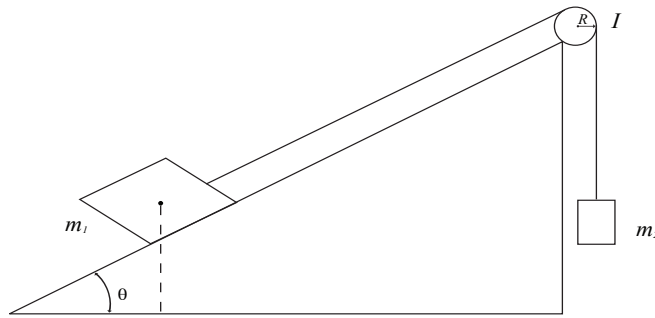


Figura 7.16.

Respuesta: $v = 2.553$ h^{1/2}

8. Las masas de la figura 7.17 son $m_1 = 15$ kg y $m_2 = 20$ kg. Ambas están conectadas por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea de radio $r = 25$ cm y momento de inercia I . La masa m_1 se mueve hacia arriba del plano cuya inclinación es $\theta = 37^\circ$, con una aceleración constante $a = 2$ m/s². ¿Cuáles son las tensiones T_1 y T_2 en la cuerda y cuál el momento de inercia I de la polea?

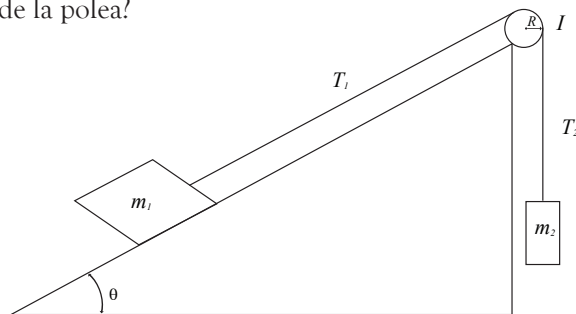


Figura 7.17.

Respuesta: $I = 1.17$ kg·m² $T_1 = 118.45$ N y $T_2 = 156.10$ N

9. El plano inclinado de la figura 7.18 tiene un ángulo $\theta = 60^\circ$ y no existe fricción. Las masas de los bloques son $m_1 = 5 \text{ kg}$ y $m_2 = 1 \text{ kg}$. La masa de la polea es m y su inercia rotacional es $I = 0.81 m R^2$. Determinar la aceleración de cada uno de los bloques.

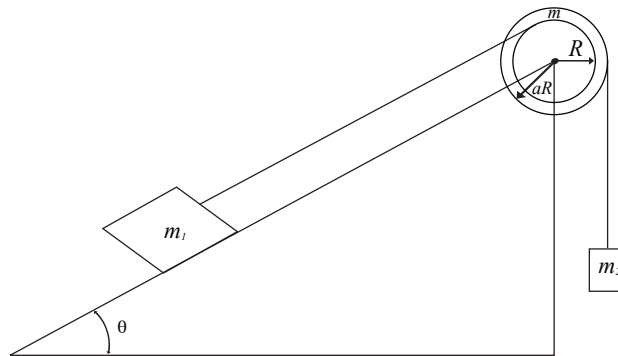


Figura 7.18.

Respuesta: $a_1 = 2.34 \text{ m/s}^2$ y $a_2 = 4.67 \text{ m/s}^2$

10. La figura 7.19 muestra un cilindro de radio $r = 20 \text{ cm}$, masa $m = 1 \text{ kg}$ y momento de inercia $I = m R^2/2$, el cual tiene una cuerda enrollada. Si uno de los extremos de la cuerda está libre y es conectado a una masa $m = 0.2 \text{ kg}$, pasando a través de una polea cuya masa es despreciable, calcular las aceleraciones del bloque y del cilindro, suponiendo que este último rueda sin resbalar.

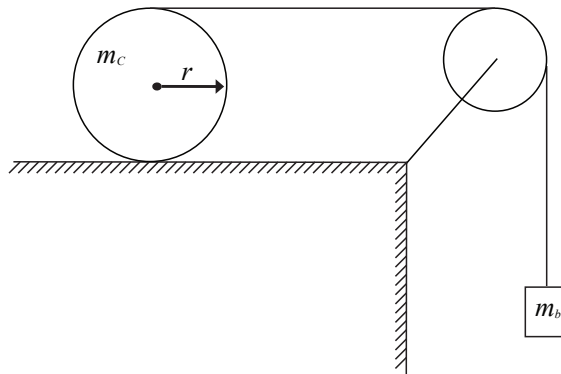


Figura 7.19.

Respuesta: $a_b = 3.42 \text{ m/s}^2$ y $\alpha_c = 8.53 \text{ rad/s}^2$