Unidad 3

Segunda ley de Newton

Objetivos

Al término de la unidad, el alumno podrá:

- Definir la segunda ley de Newton y el concepto de masa.
- Enunciar la ley de gravitación de Newton.
- Aplicar la segunda ley de Newton a sistemas constituidos por un cuerpo sujeto a la interacción de otros para calcular su aceleración adquirida, por ejemplo, si se conocen las fuerzas que actúan sobre él.
- Aplicar la segunda ley de Newton a sistemas constituidos por un cuerpo interaccionando con otros, tomando en cuenta las fuerzas de rozamiento entre superficies en contacto y el movimiento relativo entre ellos.

Introducción

El intento por encontrar leyes fundamentales que se aplicaran a muchas experiencias cotidianas relativas al movimiento llevó muchos siglos y fue hasta la época de Galileo y posteriormente en la de Newton donde se alcanzaron grandes progresos.

Las tres leyes del movimiento de Newton dieron luz al conocimiento científico por muchos años y son el eje principal de la mecánica clásica, cuyo propósito es determinar la relación entre el estado de movimiento de un cuerpo y las fuerzas que actúan sobre él.

La mecánica newtoniana es adecuada para describir eventos físicos de la experiencia diaria, es decir, eventos que suceden a velocidades muchísimo menores que la velocidad de la luz y a escala macroscópica.

3.1 Gravitación

En la naturaleza se identifican cuatro tipos de fuerzas: la gravitacional, la electromagnética y las nucleares fuerte y débil. De ellas, la gravitacional es la dominante. Las fuerzas nucleares se manifiestan a escalas atómicas y subatómicas, las fuerzas electromagnéticas y sus efectos no siempre se pueden observar a simple vista, mientras que la fuerza gravitacional es la responsable del movimiento planetario.

Newton (1642-1727) publicó en su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de 1687, la vinculación entre la fuerza que mantiene a la luna orbitando alrededor de la tierra y la que provoca la caída de los cuerpos debido solo a su peso.

Fue Newton quien le dio a estos eventos un sustento matemático y físico, basándose en el trabajo experimental de Kepler y en la estructura de pensamiento de Galileo.

Según la segunda ley de Newton, si un cuerpo experimenta una aceleración, entonces hay una fuerza que actúa sobre él. De igual manera se sabe que dos cuerpos, por el hecho de tener masa, ejercen una fuerza uno sobre otro. Newton examinó estos fenómenos sobre el tipo de fuerza que actúa sobre la Luna, para que ésta mantenga una orbita casi circular alrededor de la Tierra, llegó a la conclusión que debe de haber una fuerza que se ejerce sobre la Luna, a la cual llamó fuerza de gravedad y que debía ser la Tierra la que ejerce esta fuerza, que es la misma que regula tanto la caída de una manzana, como a la orbita lunar.

La gravitación es, por lo tanto, una sola fuerza universal y fundamental que influye en el movimiento de una partícula con masa apreciable tanto como en el de una galaxia.

Esta fuerza universal ha sido discutida como una de las más amplias generalizaciones de la mente humana. Su fenomenología ha sido plasmada en un principio elegantemente simple llamado la Ley de la Gravitación.

Antes de comenzar con el estudio de la ley de la gravitación universal es necesario conocer las leyes de Newton y el concepto de masa.

1. Un cuerpo tiende a permanecer en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme mientras no actúe una fuerza externa que modifique dicho estado.
2. La aceleración producida en un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza aplicada e inversamente proporcional a su masa. La expresión matemática de esta ley está dada por $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (3.1) donde $\sum \vec{F}$ es la suma de fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo.

   m: masa del cuerpo

   $\vec{a}$: es la aceleración

3. Para cada fuerza de acción siempre existe una fuerza de reacción de la misma magnitud pero de sentido opuesto. Las fuerzas de reacción y de acción actúan, de manera independiente, para cada uno de los cuerpos que interactúan.

¿Qué es la masa?

La masa es un concepto intuitivo. Una manera de concebir el concepto de masa es desde un punto de vista operativo se puede definir la *masa* o saber la *cantidad de masa* que tiene un cuerpo utilizando una balanza. Cuando en uno de los brazos de la balanza colocamos un cuerpo con masa desconocida y en el otro brazo se coloca un cuerpo con masa conocida y la balanza se mantiene en equilibrio por la acción conjunta de estos dos cuerpos, se puede decir que estos dos cuerpos tienen *masas iguales*.

Si se realiza este experimento en otro lugar que no sea la Tierra, por ejemplo, en la Luna, en teoría se encontraría una masa equivalente a la encontrada en la Tierra. En otras palabras, la balanza también permanecería en equilibrio en la Luna. Esto significa que la masa es una propiedad de los cuerpos independiente del lugar donde se encuentren. Se podría expresar de la siguiente forma: la masa es invariante ante el cambio de posición espacial.

El concepto de masa va todavía más allá. Para medir la masa desconocida es posible que elijamos una masa patrón adecuada. Por ejemplo: supongamos que nuestra masa patrón es 1 kg y deseamos medir una masa de 5 kg. Eso significa que la masa (originalmente desconocida) de 5 kg pesa un múltiplo de la masa patrón. Cuando la masa se mide de esta manera se dice que se está obteniendo la *masa gravitatoria*.

Existe una última concepción de masa. Esta es cuando la masa está movimiento. Si por ejemplo, a la masa de 5 kg se le aplica una fuerza y se caracteriza la masa, que se mueve con consecuencia de su interacción con la fuerza, se dice que se está midiendo la *masa inercial.* La masa inercial es una medida de la resistencia que presenta un cuerpo al cambio en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme.

Es pertinente mencionar que ambas mediciones, la de la masa gravitacional y la de la masa inercial son mediciones equivalentes y por ello su unidad de medida en el SI es el kg.

¿Qué es esta ley de la gravitación?

Consiste en que todo objeto A en el universo atrae a todo otro objeto B con una fuerza que para dos cuerpos cualesquiera varía inversamente con el cuadrado de la distancia entre ellos. Lo anterior se puede analizar de la siguiente manera.

Sea

$$F_G \propto \frac{1}{r^2} \tag{3.2}$$

la fuerza gravitacional (F_G) ejercida por la Tierra sobre cualquier otro cuerpo, la cual es proporcional a la variación inversa del cuadrado de la distancia que los separa, considerándo dicha distancia el centro de la Tierra.

Para poder hacer uso algebraico de la relación 3.1 es común añadir una constante *k*, eliminar el signo de proporcionalidad α y agregar el signo de igualdad, de la siguiente manera

$$F_G = \frac{k}{r^2} \quad \text{o} \quad k = F_G r^2 \tag{3.3}$$

Así, F_G corresponde a la fuerza gravitacional entre dos partículas como se ilustra en la figura 3.1:

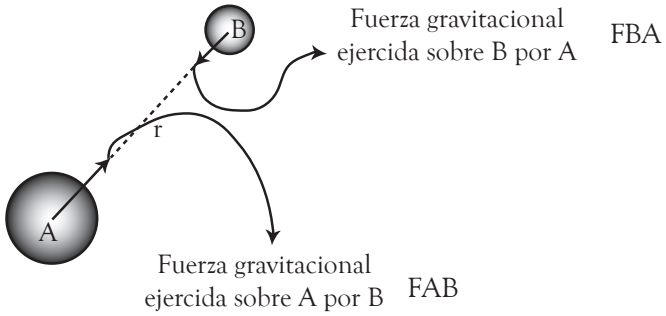


Figura 3.1. Esquema que ilustra la fuerza gravitacional que se ejerce mutuamente entre dos partículas.

Dice la tercera ley de Newton que la Tierra ejerce fuerza gravitacional sobre cualquier cuerpo, y a su vez, dicho cuerpo ejerce una fuerza de dirección opuesta e igual magnitud sobre la Tierra. ($F_{BA} = -F_{AB}$, figura 3.1). Por tanto, la fuerza de gravedad también depende de las masas. Así, la constante *k* es directamente proporcional a las dos masas:

$$k \propto m_A m_B \tag{3.4}$$

Aplicando el mismo procedimiento que para la relación 3.1, la relación 3.3 la podemos reescribir como:

$$k = G m_A m_B \tag{3.5}$$

Donde G es la constante de la gravitación universal, que se ha determinado experimentalmente, y cuyo valor aceptado es de 6.67×10^{-11} ($N\ m^2/kg^2$).

La expresión (3.4) se sustituye en (3.2) para conocer la F_G y se obtiene:

$$F_G = \frac{G m_A m_B}{r^2} \tag{3.6}$$

Esta ecuación es la expresión de la ley de la gravitación universal, que se define de la siguiente manera:

> Todo cuerpo en el Universo atrae a otros cuerpos con una fuerza que es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros de masa. Esta fuerza actúa a lo largo de la línea de acción que une a los dos cuerpos.

Dicho de otra manera, la fuerza varía con el inverso del cuadrado de la separación de los cuerpos, y además la fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo es directamente proporcional al producto de las masas de dichos cuerpos. De acuerdo con la ley de gravitación universal, la fuerza de atracción entre un

cuerpo que se encuentra sobre la superficie de la tierra y ésta, es máxima y tiende a disminuir a medida que el cuerpo se aleja ya que aumenta la distancia entre las masas (la fuerza de atracción gravitacional es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a dos cuerpos). Sin embargo, si un cuerpo se adentrara en la tierra, la masa por de bajo de este disminuye la fuerza gravitacional (la fuerza es directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos que interaccionan).

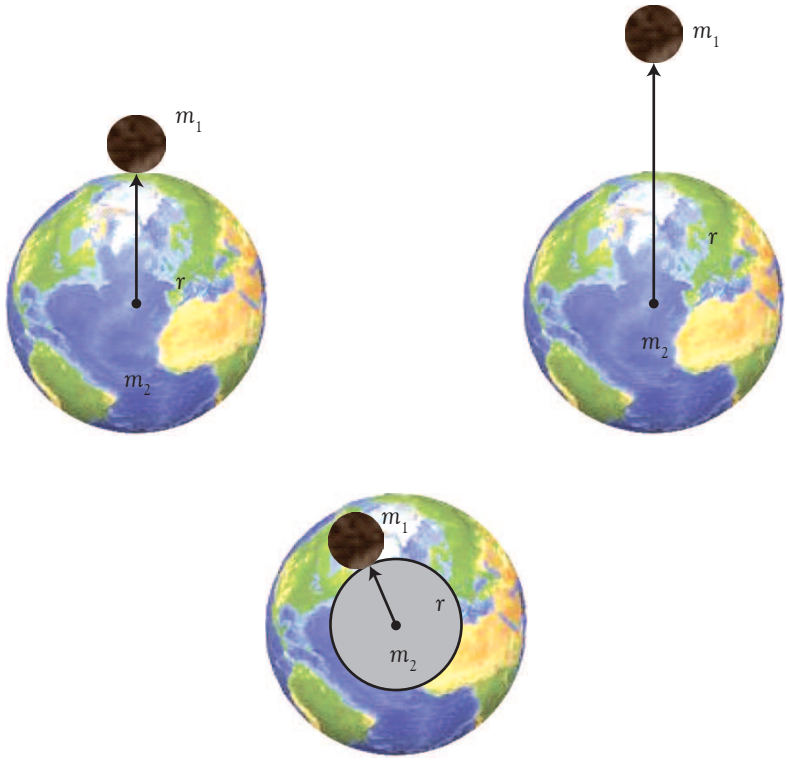


Figura 3.2.

Una vez que se ha establecido la Ley de gravitación se comenzará con la idea de la intensidad del campo gravitatorio o, simplemente, gravedad. La fuerza gravitacional, de acuerdo con Newton, es una fuerza universal en la que cada cosa atrae a las demás. En otras palabras, es una fuerza de atracción entre cuerpos.

El campo gravitatorio representa la interacción gravitatoria y puede interpretarse como la fuerza gravitatoria por unidad de masa. El concepto intensidad de campo gravitatorio o simplemente de gravedad es el más intuitivo, a diferencia del concepto de fuerza. En física, la aceleración de la gravedad se representa con el vector $\vec{g}$. Las unidades de la aceleración de la gravedad en el sistema MKS están dadas por m/s^2.

Sobre la superficie de un planeta típicamente esférico la aceleración de la gravedad está dada por:

$$\vec{g}_{sup} = \frac{GM}{R^2}\vec{u}_r \qquad (3.7)$$

Donde G es la constante de gravitación universal en $N.m^2/kg^2$, M es la masa del planeta en kg, *R* es el radio del planeta en m y $\vec{u}_r$ es un vector unitario que toma una dirección hacia el centro del planeta.

El valor de la constante de la gravitación universal G en el sistema internacional SI de unidades es de 6.67×10^{-11} N m^2/kg^2 ($m^3/kg\ m^2$).

Los valores de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra varían, de 9.781 m/s^2 (o en el sistema Inglés de 32.09 ft/s^2) en el ecuador, hasta alcanzar un valor de 9.833 m/s^2 (o de 32.26 ft/s^2) en los polos; para efectos de cálculo se usará el valor aproximado de 9.81 m/s^2 (o de 32.2 ft/s^2).

El valor de la aceleración de la gravedad tiene su valor máximo en la superficie del planeta, disminuyendo de forma aproximadamente parabólica con la altura y de forma lineal con la profundidad.

La aceleración de la gravedad en la Tierra varía según la altura. Para el caso de una altura *H* sobre la superficie terrestre, el valor de la gravedad se encuentra determinado por la siguiente fórmula:

$$\vec{g}(H) = \frac{GM}{(R+H)^2}\vec{u}_r \tag{3.8}$$

Equivalentemente $\vec{g}$ puede definirse como el peso por unidad de masa de un objeto que se encuentra sobre la superficie de la Tierra. De esta manera:

$$\vec{g} = \frac{\vec{w}}{m} \tag{3.9}$$

La lista adjunta muestra la aceleración de la gravedad en el Sol, en las superficies de cada planeta del Sistema Solar y en la Luna, tomando como referencia su relación con el valor de *g* en la Tierra.

Para el caso de la Luna, la gravedad lunar representa 0.16 veces la gravedad que existe en la Tierra.

Astro	Factor de multiplicación
Sol	27.90
Mercurio	0.37
Venus	0.88
Tierra	1.00
Luna	0.16
Marte	0.38
Júpiter	2.64
Saturno	1.15
Urano	0.93
Neptuno	1.22
Plutón	0.06

Ejemplo 1

Una chica de 55 kg y un muchacho de 77 kg se encuentran en un parque a una distancia de 2.5 m. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza con la que se atraen?

Usando la ecuación (3.6) y sustituyendo en ella los datos del enunciado.

$$F_G = \frac{G m_A m_B}{r^2} = \frac{(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2})(55\mathrm{kg})(77\mathrm{kg})}{(2.5\mathrm{m})^2} = 4.5\times10^{-8}\,\mathrm{N}$$

¡Este valor realmente es una fuerza muy pequeña, tal vez necesitan acercarse más!

Ejemplo 2

Un objeto de masa igual a 50 kg se encuentra a una distancia de 6,380 km de la superficie de la Tierra, calcular el valor de la magnitud de la gravedad y el peso de ese objeto a esa distancia. Si la masa de la Tierra es de 5.97 x 10^{24} kg y el radio de la Tierra es de 6,380 km, sabiendo que la constante de la gravitación universal es de 6.67 x 10^{-11} $m^3/kg.m^2$ ($N.m^2/kg^2$).

En la fórmula 3.8 se tiene que H = 6 380 km = R, o sea, el radio de la Tierra, entonces:

$$g(R) = \frac{GM}{(R+R)^2} = \frac{GM}{(2R)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{GM}{R^2}\right) = 2.4525\frac{m}{s^2}$$

De la ecuación 3.9 el peso del objeto es:

$$\vec{w} = m\vec{g} = (50kg)\left(2.4525\frac{m}{s^2}\right) = 122.625\ \mathrm{N}$$ hacia el centro de la tierra.

No hay que olvidar que el peso es la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre cualquier objeto de masa m que se encuentra dentro del campo gravitatorio; este peso se mide en Newtons (N) en el SI, que se define como:

$$1\mathrm{N} = (1\mathrm{kg})\left(1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)$$

Ejemplo 3

Si el objeto del problema anterior, de masa igual a 50 kg se colocara en la superficie de Venus, la Tierra, la Luna y Júpiter, ¿cuál sería el peso en cada caso?

Para Venus: $w = (m)\,(g_{Venus}) = (m)\,(0.88g) = (50\mathrm{kg})\,(0.88)\,(9.81\mathrm{m/s^2}) = 431.64$ N hacia el centro de Venus

Para la Tierra: $w = (m)\,(g_{Tierras}) = (m)\,(1.00g) = (50\mathrm{kg})\,(1.00)\,(9.81\mathrm{m/s^2}) = 490.50$ N hacia el centro de la Tierra

Para la Luna: $w = (m)\,(g_{Luna}) = (m)\,(0.16g) = (50kg)\,(0.16)\,(9.81m/s^2) = 78.48$ N hacia el centro de la Luna

Para Júpiter: $w = (m)\,(g_{Júpiter}) = (m)\,(2.64g) = (50kg)\,(2.64)\,(9.81m/s^2) = 1{,}294.92$ N hacia el centro de Júpiter

Ejercicios 3.1

1. Realiza una investigación donde se relacione la Luna con las mareas.
2. Compara la fuerza de la gravedad aplicada sobre una bola hecha al arrugar una hoja de papel con la fuerza de la gravedad aplicada a la misma hoja, pero sin arrugar. Justifica tu respuesta.
3. Si la masa del planeta Mercurio es de 3.3 x 1023 kg y su radio de 2439.7 km, ¿cuál es el valor de g en su superficie?
4. ¿Cuánto pesa un objeto de 38 kg colocado en la superficie de Mercurio?
5. ¿Cuánto pesarías si estuvieras parado en la superficie de Marte?
6. ¿Cuál será el valor de g a una distancia del centro de la Tierra de 4 veces su radio si la masa de la Tierra es de 5.97x1024 kg y el radio es de 6,380 km?
7. Dos barras metálicas, una de ellas de 500 kg y otra de 1,000 kg, se encuentran a una distancia de 4.5 m, ¿con qué fuerza se atraen?
8. Si la gravedad en la Luna es de 1.6 m/s^2, ¿cuál será el peso en la Luna de una persona cuyo peso en la superficie terrestre es de 540 N?
9. ¿Cuál debe ser el valor de la gravedad en un planeta si el peso de un objeto sobre su superficie es el triple que sobre la superficie de la Tierra?
10. Una roca de 2 kg de masa se encuentra localizado en un punto sobre un planeta donde el radio mide 1.74x106 m. Si la masa del planeta es de 7.25 x 1,022 kg, determina la fuerza gravitacional que ejercerá el planeta sobre la roca.

3.2. El movimiento de los planetas

En el espacio se puede observar experimentalmente y de una manera clara el cumplimiento tanto de la ley de la gravitación universal como de las tres leyes de Newton. Por ejemplo, la primera ley de Newton se comprueba si a un objeto, estacionado en el espacio y aislado de la influencia de fuerzas externas promovidas por otros cuerpos o planetas, se le aplica una fuerza de manera instantánea; enseguida, se observará alterado el estado de movimiento de este cuerpo del estado estático al movimiento rectilíneo con velocidad uniforme siendo este último el que se conserve de manera indefinida. A menos que otra fuerza externa lo altere.

Fue en el espacio, específicamente con el estudio del movimiento relativo entre la Tierra, la Luna y el Sol donde Newton se percató de que la gravedad era una de las fuerzas que controlaba dicho movimiento de los planetas.

El movimiento de los planetas es muy complejo, pues no sólo se involucran conceptos ya conocidos como la ley de la gravitación universal y las tres leyes de Newton, sino que además es necesario abordar nuevos conceptos que surgen y están relacionados con este movimiento. Por ejemplo: los planetas en general se mueven en trayectorias elípticas. Este movimiento trae como consecuencia que exista, en vez de una velocidad lineal, una velocidad angular; que haya aceleración debido al cambio continuo de dirección del vector de velocidad tangencial a lo largo de todo el movimiento y que tanto esta velocidad angular como la aceleración angular dependan del radio de giro del cuerpo. Para comprender el movimiento de los planetas y en general de cuerpos que giran en torno a un punto, es necesario estudiar lo que conocemos como las propiedades del movimiento circular.

La fenomenología orbital que tanto Newton, como Galileo y Keppler estudiaron creó la necesidad de asociar la ley de la gravitación universal con las tres leyes de Newton y un formalismo físico y matemático que explicara y cuantificara los parámetros asociados al movimiento alrededor de los planetas como la velocidad angular, la aceleración angular, la fuerza centrípeta, etcétera.

Lo que justifica que todo el conocimiento relacionado con el movimiento circular, se pueda aplicar a problemas relacionados con el movimiento de planetas y estrellas es que, en principio, se simplifican las órbitas de los planetas al considerarse circulares en lugar de elípticas.

3.2.1. Movimiento Circular Uniforme (MCU)

Para estudiar el movimiento circular se va a considerar el caso especial en el que un cuerpo describe una trayectoria circular. Este movimiento tiene las siguientes características (ver figura 3.3):

(I) La velocidad $\vec{v}$ es un vector tangente al círculo y por tanto, perpendicular al radio r.

(II) Cuando se miden distancias a lo largo de la circunferencia del círculo, a partir de la posición del radio indicado con la letra r se describe un arco s que esta asociado al ángulo θ medido en radianes de la siguiente manera: $\theta = \frac{s}{r}$.

(III) La magnitud de la rapidez del movimiento circular es constante, es decir, recorre arcos iguales en tiempos iguales.

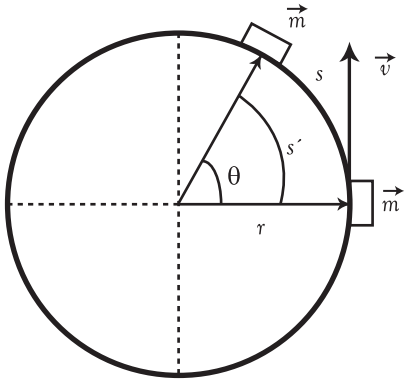


Figura 3.3.

El que la rapidez sea constante simplemente significa que la magnitud de la velocidad angular es constante. Hay que recordar que el concepto de velocidad es de mayor complejidad que el de la rapidez (similar al de la rapidez y velocidad lineal). La velocidad es una cantidad vectorial y por tanto tiene magnitud, dirección y sentido; mientras que la rapidez sólo posee magnitud.

La característica (II) tiene fuerte relevancia en la comprensión del movimiento circular. El hecho de que $\theta = \frac{s}{r}$ significa que dado un ángulo, descrito por un movimiento circular, la relación $\frac{s}{r}$ es constante e independiente del radio y es, por lo tanto, la medida del ángulo expresada en radianes. En otras palabras, si se elige el arco *s'*, ahora el radio asociado será *r*/2, y por tanto la relación $\frac{s'}{r/2}$ seguirá siendo igual a θ. Por eso se dice que $\frac{s}{r}$ "es constante e independiente del radio".

Por consiguiente, si aplicamos el concepto de que la derivada de la posición con respecto al tiempo es la velocidad, esto es: $v = \frac{ds}{dt}$ y como *s* es una función de θ y de *r* entonces: $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$. De acuerdo con lo ya explicado en el párrafo anterior, $s = r\theta$ por tanto: $\frac{ds}{d\theta} = r$ y esto implica que $\frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$. La derivada $\frac{d\theta}{dt}$ significa la razón de cambio del ángulo descrito con respecto al tiempo: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, que es precisamente la velocidad angular que lleva el objeto al describir un movimiento circular.

La unidad en el SI de la velocidad angular son las r.p.m. (revoluciones por minuto) o r.p.s. (revoluciones por segundo).

Ejemplo 4

Para convertir en radianes un ángulo expresado en grados es necesario saber que 360° son 2π radianes, o que 180° son π radianes. Por ejemplo, expresar en 30° radianes:

$$30° = 30\frac{2\pi}{360}\text{rad} = \frac{\pi}{6}\text{rad}$$

3.2.1.1 Velocidad angular y velocidad lineal

Continuando con la expresión $\frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$. Esta se puede reescribir como $v = r \cdot \omega$, siendo v la velocidad lineal del objeto (el espacio s recorrido en el tiempo t que dura el movimiento). Por tanto: la velocidad angular se relaciona con la velocidad lineal mediante la espresión:

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad (3.10)$$

3.2.1.2 Aceleración centrípeta

En el caso especial del MCU la aceleración es, en todo momento, normal a la trayectoria del movimiento circular. Además es dirigida hacia el centro del radio de curvatura. Esta aparece debido al cambio continuo de dirección del vector velocidad a lo largo de todo el movimiento, figura 3.3. Se le llama aceleración centrípeta a_c y su magnitud se obtiene dividiendo el cuadrado de la velocidad entre el radio de la trayectoria:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (3.11)$$

3.2.1.3. Frecuencia y periodo del M C U

El número de vueltas completas que da un objeto en un segundo se llama frecuencia y se denota con f y su recíproco, esto es, el tiempo que se emplea en dar una vuelta completa se designa como periodo y se denota con T:

$$T = \frac{1}{f} \text{ y } f = \frac{1}{T} \qquad (3.12)$$

Dado que una revolución equivale a una vuelta de 360° = 2π radianes, entonces también se puede expresar la velocidad angular como:

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (3.13)$$

Por lo tanto, otra manera de expresar las unidades de rapidez de MCU en el S.I. son los radianes por segundos $\left[\frac{\text{rad}}{s}\right]$.

3.2.1.4. Fuerza centrípeta

En el movimiento circular se experimentan dos tipos de fuerzas: la tangencial, que es colineal a la velocidad tangencial del movimiento, es decir, al vector $\vec{v}$ de la figura 3.3 y la centrípeta, que es la componente de la fuerza perpendicular a la trayectoria y que tiene la misma dirección que la aceleración centrípeta. Su magnitud de acuerdo con las ecuaciones 3.1 y 3.11:

$$F_c = m\,a_c = \frac{m \cdot v^2}{r} \qquad (3.14)$$

Como reflexión, se te pide contestar lo siguiente relacionado con la fuerza centrípeta:

1. Hallar una fórmula para F_c, en función de la velocidad angular.
2. Cuando se gira un objeto atado a una cuerda en un plano horizontal, ¿quién ejerce la fuerza centrípeta?
3. ¿Cuál es la causa de que la luna describa su órbita alrededor de la Tierra?
4. ¿Se puede hablar de aceleración centrípeta en un movimiento rectilíneo?

Ejemplo 5

Empleando las ecuaciones 3.1, 3.6 y 3.13, determina la relación entre la masa del Sol y la masa de la Luna:

$$F = ma = m\omega^2 r, \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}, \; F = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

La magnitud de la fuerza gravitacional entre la Tierra y el Sol está dada por:

$$F_{TS} = \frac{GM_T M_S}{r_{TS}^2} \qquad (3.15)$$

De igual manera, la magnitud de la fuerza gravitacional entre la Tierra y la Luna es:

$$F_{TL} = \frac{GM_L M_L}{r_{TL}^2} \qquad (3.16)$$

Dividiendo la ecuación (3.15) entre la (3.16) se obtiene:

$$\frac{F_{TS}}{F_{TL}} = \frac{M_S\, r_{TL}^2}{M_L\, r_{TS}^2} \text{ de donde } \frac{M_S}{M_L} = \frac{r_{TS}^2\, F_{TS}}{r_{TL}^2\, F_{TL}}$$

como $F_{TS} = \dfrac{M_T\; 4\pi^2\, r_{TL}}{T_{TL}^2}$ y $F_{TL} = \dfrac{M_T\; 4\pi^2\, r_{TL}}{T_{TL}^2}$

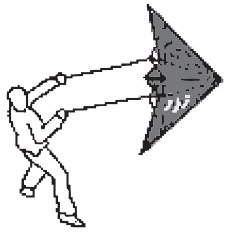
Sustituyendo y eliminando la masa de la Tierra y reagrupando términos se llega a:

$$\frac{M_S}{M_L}=\left(\frac{T_{TL}}{T_{TS}}\right)^2\left(\frac{r_{TS}}{r_{TL}}\right)^3=\left(\frac{27.3\,\text{días}}{365\,\text{días}}\right)^2\left(\frac{1.49\times10^{11}\,\text{m}}{3.84\times10^{8}\,\text{m}}\right)^3=3.3\times10^5$$

¡El Sol es 330,000 veces más grande que la Luna!

Ejercicios 3.2

1. Un disco de 15 cm de radio gira a 45 rpm. Determina la magnitud de la velocidad lineal en algún punto de su periferia.
2. La rueda de una bicicleta de 30 cm de radio gira a razón de 200 vueltas por minuto. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento y la magnitud de su aceleración centrípeta?
3. Colocamos pintura en la superficie de una llanta de bicicleta de 30 cm de radio de modo que al girar vaya dejando dibujada una línea. ¿Cuál será la velocidad angular de la llanta si dibuja una línea de 2m en 3 segundos?
4. Un objeto amarrado al extremo de una cuerda de 50 cm de longitud gira con una velocidad angular de 300 rpm. Determina la magnitud de su velocidad lineal.
5. Determina la aceleración centrípeta que experimenta un papalote el cual está girando como se muestra en la figura a 0.5m/s y la longitud de los cables es de 3m.



6. Calcula la fuerza centrípeta que experimenta una bola de 3 kg que se encuentra amarrada al extremo de una cuerda de 2 m de longitud la cual se hace girar en un plano horizontal dando 1 vuelta completa en 4 segundos.
7. Determina la velocidad angular del minutero de un reloj.
8. Una máquina centrifugadora tiene un cilindro de 0.4 m de radio. Si la máquina trabaja a 560 rpm, determina la frecuencia del cilindro y la aceleración centrípeta.
9. Determina la fuerza centrípeta que experimenta una cubeta de 5 kg que gira en un movimiento circular con una velocidad lineal de 25 m/s si está amarrada a una cuerda de 2 m.
10. Un competidor de lanzamiento de martillo gira y experimenta una velocidad lineal de 40 m/s. Si el martillo tiene una masa de 4.5 kg y el radio de giro es de 11 m, determina la fuerza centrípeta experimentada por el peso.

3.3 Aplicaciones de la segunda ley de Newton

En este apartado se explican aplicaciones de la segunda ley de Newton al estudio del movimiento de objetos de acuerdo con su velocidad y posición.

De acuerdo con la ecuación 3.1:

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a} \qquad \text{o} \sum \vec{F}_{neta} = m\vec{a}$$

Para encontrar una forma de determinar la fuerza o fuerzas que actúan sobre un objeto, ya sea que esté en reposo o en movimiento, hay que visualizar que el sistema puede constar de varias partes, cada una de las cuales presenta una aceleración y masa. La magnitud de *F* es una fuerza neta, o sea, la fuerza resultante que actúa sobre cada parte del sistema que es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre una determinada parte.

Después de esta observación, es útil separar las partes que constituyen al sistema y esquematizar un diagrama de fuerzas para cada una. Estos diagramas reciben el nombre de diagramas de cuerpo libre.

En un diagrama de cuerpo libre cada objeto de estudio se puede representar como un punto con una determinada masa, ya que para la segunda ley no importa su forma ni su tamaño. Se ilustran además todas las fuerzas que actúan sobre un determinado objeto y hay dos que son muy importantes, que son su peso, que actúa hacia abajo y la fuerza de contacto de una superficie hacia arriba. Si el objeto está en reposo en una superficie horizontal significa que la fuerza de contacto es igual y opuesta al peso del objeto. Esta fuerza de contacto es la fuerza normal que tiene una dirección perpendicular a la superficie.

Ejemplo 6

Una masa de 2 kg es empujada por una fuerza resultante de (a) 9 N, (b) 10 N, y (c) 15 N. Calcular las aceleraciones resultantes.

(a) $a = \dfrac{9\text{N}}{2\text{ kg}} = 4.5\text{m/s}^2$ (b) $a = \dfrac{10\text{N}}{2\text{ kg}} = 5\text{m/s}^2$ (c) $a = \dfrac{15\text{N}}{2\text{ kg}} = 7.5\text{m/s}^2$

Ejemplo 7

Determinar las aceleraciones resultantes cuando una fuerza constante de 120 N actúa sobre una masa de (a) 2 kg, (b) 4 kg, y (c) 6 kg.

(a) $a = \dfrac{120\text{N}}{2\text{ kg}} = 60\,\text{m/s}^2$ (b) $a = \dfrac{120\text{N}}{4\text{ kg}} = 30\,\text{m/s}^2$ (c) $a = \dfrac{120\text{N}}{6\text{ kg}} = 20\,\text{m/s}^2$

Ejemplo 8

Determina la aceleración que produce una fuerza de 150 Newtons que actúa sobre un cuerpo cuya masa es de 5,000 gramos. Expresa el resultado en m/s^2 de acuerdo con la ecuación 3.1.

a = ? $a = F/m$ $a = \dfrac{50\text{ kg m/s}^2}{5\text{ kg}} = 30\text{ m/s}^2$

F = 150 N

m = 5 000 gramos = 5 kg

Ejemplo 9

Determina la masa de un cuerpo si al recibir una fuerza de 500 Newtons le produce una aceleración de 2 m/s^2. Expresa el resultado en kg empleando la ecuación 3.1.

m= ? $m = F/a$ $m = \dfrac{500\text{ kg m/s}^2}{2\text{ m/s}^2}$

F = 500 N

a = 2 m/s^2 m = 250 kg

Ejemplo 10

Determinar la fuerza que recibe un cuerpo de 10 kg, la cual le produce una aceleración de 5 m/s^2 empleando la ecuación 3.1.

F = ? $F = ma$ F = (10 kg) (5 m/s^2)

m = 10 kg F = 50 kg m/s^2

a = 5 m/s^2 **F = 50 Newtons**

Ejemplo 11

Determinar el peso de un cuerpo cuya masa es de 60 kg. Emplea la ecuación 3.9.

w = ?
m = 60 kg
g = 9.8 m/s^2

$w = mg$

w = (60 kg) (9.8 m/s^2)
w = 588 kg m/s^2
w = 588 Newtons

Ejemplo 12

Calcular la masa de un cuerpo cuyo peso es de 580 Newtons empleando la ecuación 3.9.

m = ?
w = 580 N
g = 9.8 m/s^2

m = w/g

$$m = \frac{580\ N}{9.8\ m/s^2}$$

m = 59.18 kg

Ejemplo 13

Un objeto de 16 kg se desliza sin fricción por un plano inclinado que forma un ángulo con la horizontal de 28° con ayuda de una cuerda de masa despreciable. Otro objeto de masa 6 kg cuelga del otro extremo de la cuerda que pasa por una polea (figura 3.4). ¿Cuál será la aceleración del sistema?

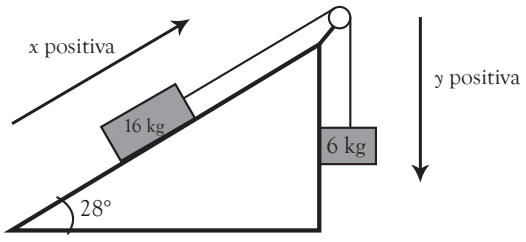


Figura 3.4.

Dibujando primero los diagramas de cuerpo libre para ambos objetos (Figura 3.5), llamando al objeto de masa de 16 kg como m_1 y al de masa de 6 kg como m_2.

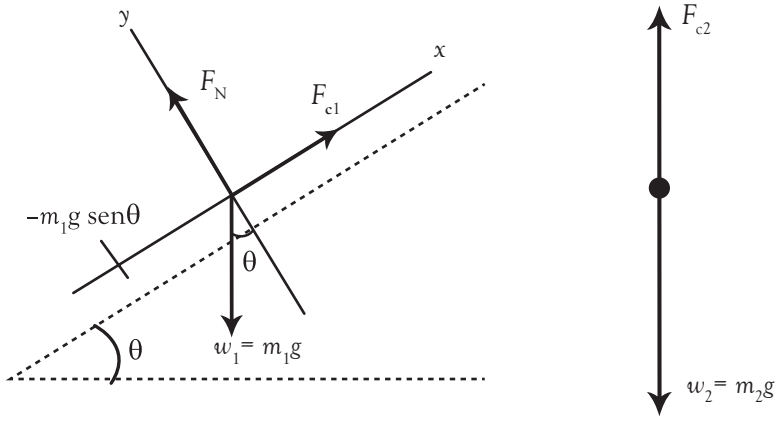


Figura 3.5.

Las aceleraciones de los objetos están relacionadas:

$$a_2 = a_1 = a$$

Las fuerzas ejercidas sobre los objetos por la cuerda cumplen la siguiente relación:

$$F_{c2} = F_{c1}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, para cada objeto la fuerza neta para el objeto de masa m_1 es:

$$\vec{F}_N + \vec{w}_1 + \vec{F}_{c1} = m_1 \vec{a}_1$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza neta para el objeto de masa m_2 es:

$$\vec{F}_{c2} + \vec{w}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

Tomando las componentes a lo largo de cada eje, para el objeto 1:

Componente *x*: $F_{c1} - m_1 g \operatorname{sen}\theta = m_1 a$

Componente *y*: $F_N - m_1 g \cos\theta = 0$

Tomando las componentes a lo largo de cada eje, para el objeto 2:

Componente *y*: $-F_{c2} + m_2 g = m_2 a$

Sustituyendo el valor de F_{c1} en F_{c2}, y resolviendo la anterior ecuación se llega a:

$$F_{c1} = -m_2 a + m_2 g$$

Sustituyendo en la componente *x* se encuentra que la aceleración del sistema tiene el siguiente valor:

$$a=\frac{g(m_2-m_1\,\text{sen}\,28°)}{m_1+m_2}=\frac{9.81\,\text{m/s}^2\,(6\text{kg}-16\text{kg}\,\text{sen}\,28°)}{22\text{kg}}=0.67\,\text{m/s}^2$$

En el ejemplo anterior se ignoran los efectos de la fricción. La fuerza de contacto está representada por dos fuerzas: F_N, la fuerza normal y F_k, la fuerza de fricción que es paralela a la superficie y opuesta a la velocidad. Ahora se incorpora, figura 3.6, el efecto de la fuerza de fricción en el estudio de los objetos en movimiento. Sólo se necesita incluir la fuerza de fricción en el diagrama de cuerpo libre. La fuerza de fricción cinética es llamada F_k.

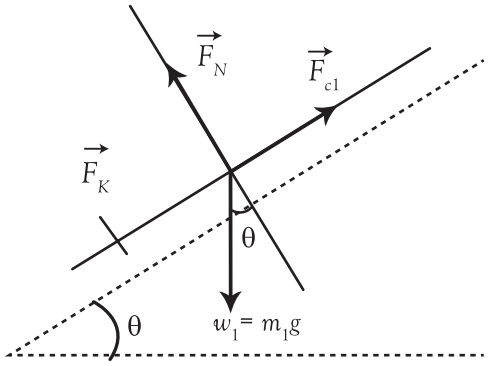


Figura 3.6.

Observando que:

$$F_k \propto F_N \therefore F_k = \mu_k F_N \tag{3.17}$$

Donde la constante de proporcionalidad μ_k es un número sin dimensiones que se denomina coeficiente de fricción cinética.

La ecuación (3.17) puede escribirse de acuerdo con la componente en *x*, en el caso de que el movimiento sea totalmente horizontal, es decir que no haya ningún ángulo con respecto a la horizontal y que no exista sobre el cuerpo ninguna fuerza diferente al peso.

$$F_k = \mu_k w = \mu_k m g$$

$$\therefore \sum F_x = ma_x = -\mu_k mg$$

$$-\mu_k = \frac{a_x}{g} \tag{3.18}$$

Ejemplo 14

Tomando el ejemplo anterior, pero ahora el cuerpo de masa de 16 kg se desliza sobre un plano lubricado; el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.03$ encuentra nuevamente la aceleración del sistema.

Al igual que en el ejemplo anterior, tomando las componentes a lo largo de cada eje para los dos objetos se tiene:

Objeto m_1:

Componente x: $F_k + F_{c1} - m_1 g \operatorname{sen}\theta = m_1 a$
Componente y: $F_N - m_1 g \cos\theta = 0$

Objeto m_2:

Componente y: $-F_{c2} + m_2 g = m_2 a$

Sustituyendo $F_N = m_1 g \cos\theta$, y $F_k = \mu_k F_N$ en la componente x, y resolviendo para a:

$$a = \frac{g(m_2 - m_1 \mu_k \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{(9.81 \text{m/s}^2)(6\text{kg} - 16\text{kg} \times 0.03 \cos 28° + \operatorname{sen} 28°)}{16\text{kg} + 6\text{kg}} = 2.69 \text{m/s}^2$$

Este resultado es, aproximadamente, la décima parte de la aceleración correspondiente al caso sin fricción.

Fuerza de fricción estática

Existe otra fuerza de fricción entre dos objetos que no están en movimiento, a esta fuerza se le llama fuerza de fricción estática, F_s. Experimentalmente se ha demostrado que:

$$F_{s,\max} \propto F_N \therefore F_s = \mu_s F_N \tag{3.19}$$

Donde μ_s es el coeficiente de fricción estático, y es una representación del grado de adhesión de dos superficies.

Una forma de medir el coeficiente de fricción estática entre un objeto y la superficie consiste en inclinar el plano. El ángulo que resulta con la horizontal justo antes de que el objeto comience a deslizarse, se conoce como el ángulo crítico θ_c de la fricción estática. Esta fuerza es por tanto una fuerza limite de fricción, la mayor fuerza que se puede aplicar a un objeto sin que se deslice sobre una superficie es proporcional a la fuerza que de contacto. Se puede determinar μ_s en función de θ_c.

Normalmente, para un par de superficies dadas, $\mu_s > \mu_k$.

Cuando el ángulo formado entre el plano y la horizontal se ajusta para que el objeto se deslice con una velocidad constante se conoce como θ_k.

Ejemplo 15

Un bloque de 3 toneladas se encuentra en reposo sobre una superficie cuando está inclinada un ángulo θ de 15°. Si se supone un ángulo critico θ_c de 39°. (a) ¿Qué valor tendrá el coeficiente de fricción estático μ_k? (b) Si θ_k formado entre el plano y la horizontal se ajusta a 42°, ¿cuál será el valor de μ_k?

(a) Cuando el bloque permanece en reposo, las componentes de las fuerzas son:

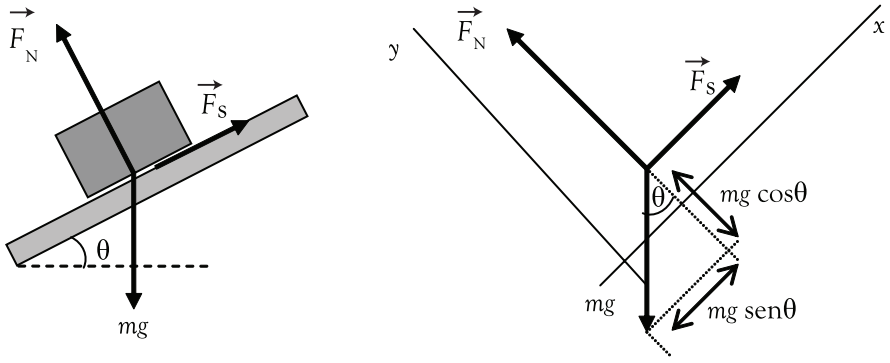


Figura 3.7.

Componente *x*: $F_s - mg\,\text{sen}\theta = 0, \quad \therefore \quad F_s = mg\,\text{sen}\theta$

Componente *y*: $F_N - mg\cos\theta = 0 \quad \therefore \quad F_N = mg\cos\theta$

Cuando $\theta = \theta_c$

$$\mu_s F_N = mg\,\text{sen}\theta_c$$

$$F_N = mg\cos\theta_c$$

Dividiendo estas expresiones y conociendo la identidad trigonométrica de $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$, se obtiene que:

$$\mu_s = \tan\theta_c \quad \therefore \quad \mu_s = \tan 39° = 0.80$$

Igualmente se puede conocer

$$\mu_k = \tan\theta_k = \tan 42° = 0.90$$

Ejemplo 16

Determinar la tensión de la cuerda y el peso del bloque 2 si el sistema de la figura 3.8 parte del reposo, si (a) el sistema adquiere una aceleración de $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; (b) el bloque 2 llega al piso con una velocidad de $2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ cuando desciende un metro.

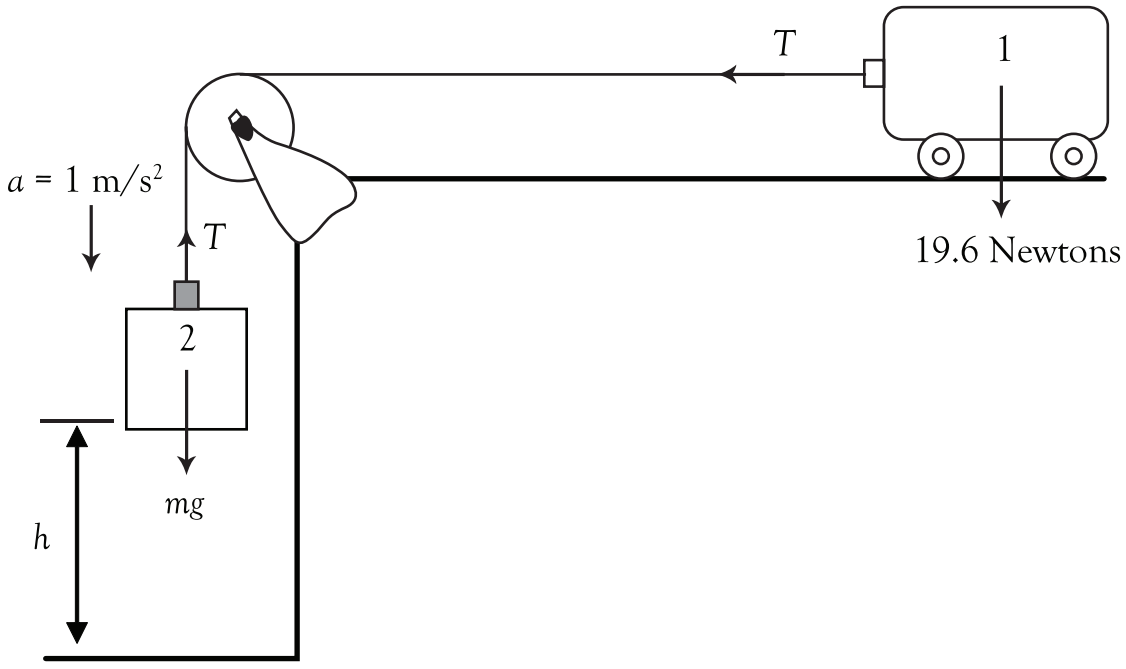


Figura 3.8.

1. Aplicando la ecuación 3.1 al bloque 1, y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento del bloque 1, se tiene:

$\vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}_1$; la fuerza que se aplica la bloque 1 es equivalente a la tensión de la cuerda, y la masa del bloque 1 es:

$m_A = \frac{\text{Peso 1}}{\text{g}} = \frac{w_1}{g}$ (aquí se está calculando un escalar); por lo que tenemos para el bloque 1:

$\vec{T} = \text{M}_1 \cdot \vec{a}_1$; siendo $\vec{T}$ el vector que representa la tensión de la cuerda y T la magnitud de esta tensión. Como la aceleración del bloque 1 es la misma para el bloque 2 (debido a que están unidos por una cuerda que pasa sobre una polea, la cual solo cambia la dirección de la fuerza.

2. Aplicamos ahora la ecuación 3.1 al bloque 2, considerando positivas la fuerzas en el sentido del movimiento del bloque 2, y de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre: $\sum \vec{F} = \text{M}_2 \cdot \vec{a}_2$; como la única fuerza que se aplica al bloque 2 es la de la tensión de la cuerda, y es la misma que se aplica en el bloque 1,

pero además, en la suma de fuerzas se debe considerar el peso del bloque 2, se tiene: $T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a_2$ (suma de magnitudes vectoriales); además, la aceleración es la misma para ambos bloques, por lo que: $T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$.

3. Sustituyendo el valor de la tensión del bloque A en la ecuación del bloque 2, se tiene:
$m_1 \cdot a - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$; como se pregunta por el peso del bloque B, ordenando:

$$m_1 \cdot a = m_2 \cdot a + m_2 \cdot g \; ; \; m_2(a+g) = m_1 \cdot a \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{m_1 \cdot a}{a+g},$$

y por tanto

$$m_2 = \frac{19.6 \text{ Newtons}}{(1+9.8)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.81 \text{kg}.$$

4. Por lo que el peso del bloque 2, es:

$$w_2 = m_2 \cdot g = 1.81 \ \text{kg} \cdot \left(9.8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 17.73 \ \text{Newtons}.$$

Respuesta.
La tensión de la cuerda, es: $T = m_1 \cdot a = 19.6 \ \text{Newtons}.$
También se puede comprobar con la expresión:
$T = m_2 \cdot a + m_2 \cdot g$;

$$T = 1.81 \ \text{kg} \cdot 1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 17.73 \ \text{Newtons} = 19.54 \ \text{Newtons}.$$

Ejemplo 17

En el sistema representado en la figura 3.9, el bloque A tiene un peso de 450 Newtons, el bloque B pesa 150 Newtons, si no hay rozamiento en la polea y el sistema parte del reposo, determinar:

a) La aceleración del bloque A.
b) La tensión de la cuerda.
c) La velocidad del bloque A cuando ha descendido 2 m.
d) La velocidad del bloque A al cabo de 3 segundos.

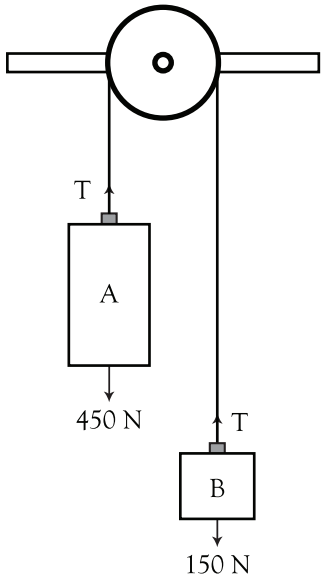


Figura 3.9.

1. Aplicando la segunda Ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del bloque A y considerando positivas la fuerzas en el sentido del movimiento del bloque A: $\sum \vec{F} = m_{\mathrm{A}} \cdot \vec{a}$.

Manejando magnitudes vectoriales y sustituyendo valores: $450 - T = m_{\mathrm{A}} \cdot a$; la tensión T de la cuerda y la aceleración es la misma para ambos bloques, porque la polea transmite la tensión.

2. Aplicando la segunda Ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del bloque B y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento del bloque B: $\sum \vec{F} = m_{\mathrm{B}} \cdot \vec{a}$;

Manejando magnitudes vectoriales y sustituyendo valores: $T - 150\ \mathrm{N} = m_{\mathrm{B}} \cdot a$; despejando la tensión de la cuerda y sustituyéndola en la ecuación obtenida para el bloque A:

$$450\ \mathrm{N} - (m_{\mathrm{B}} \cdot a + 150\ \mathrm{N}) = m_{\mathrm{A}} \cdot a\,,$$

despejando la aceleración:

$$450\ \mathrm{N} - 150\ \mathrm{N} = a(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}});\ a = \frac{300\ \mathrm{N}}{\dfrac{450\ \mathrm{N} + 150\ \mathrm{N}}{9.8\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 4.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Respuesta.

La tensión de la cuerda, es:

$$T = m_{\mathrm{B}} \cdot a + 150\ ;\ T = \frac{150\ \mathrm{N}}{9.8\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \cdot \left(4.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) + 150\ \ \mathrm{N} = 225\ \ \mathrm{N}$$

Para determinar la velocidad del bloque A al cabo de los 3 segundos, que será la misma magnitud para el bloque B:

$$v_f = v_0 + a \cdot t \; ; \; v_{fA} = 0 + 4.9\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3\ \text{s}) = 14.7\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejercicios 3.3

1. El cable de un ascensor ejerce hacia arriba una fuerza de 2,000 N sobre una caja que tiene una masa de 1,600 kg. ¿Cuál es su aceleración?
2. El coeficiente de fricción estático entre una caja de 40 kg y la plataforma de un camión es de 2. Determina la aceleración máxima que adquirirá el camión a lo largo del piso nivelado si no deseas que la caja resbale.
3. La única fuerza que se aplica a un objeto de 5 kg, tiene por componentes F_x = 20 N y F_y = 30 N. Encuentra la aceleración del objeto.
4. Una fuerza *F* aplicada a un objeto de masa m_1 produce una aceleración de 3 m/s^2. La misma fuerza aplicada a un objeto de masa m_2 produce una aceleración de 1 m/s^2.
   (a) ¿Cual es el valor de la proporción m_1/m_2?
   (b) Si se combinan m_1 y m_2 encuentra su aceleración bajo la acción de *F*.
5. Tres fuerzas dadas por $\vec{F}_1 = (-2i + 2j)$N, $\vec{F}_2 = (5i - 3j)$N, y $F_3 = (-45i)$ N actúan sobre un objeto para producir una aceleración de magnitud 3.75 m/s^2
   a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración?
   b) ¿Cuál es la masa del objeto?
   c) Si el objeto inicialmente esta en reposo, ¿cuál es su velocidad después de 15 s?
   d) ¿Cuales son las componentes de velocidad del objeto después de 15 s?
6. Una bala de 5 gr sale del cañón de un rifle con una rapidez de 320 m/s. ¿Qué fuerza ejercen los gases en expansión tras la bala mientras se mueve por el cañón del rifle de 0.82 m de longitud? Supón aceleración constante y fricción despreciable.
7. Un hombre lanza horizontalmente hacia el frente una pelota de béisbol de 1.4 N de peso a una velocidad de 32 m/s. Al acelerar uniformemente su brazo durante 0.09 s. Si la bola parte del reposo.
   a) ¿Qué distancia se desplaza antes de acelerarse?
   b) ¿Qué fuerza ejerce el lanzador sobre la pelota?
8. Un objeto con una masa de 5 kg cuelga del extremo de una cuerda que pasa por una polea sin fricción, y en el otro extremo cuelga una masa de 12 kg, figura 3.10. Encuentra la aceleración de las masas y la fuerza de tensión en la cuerda.

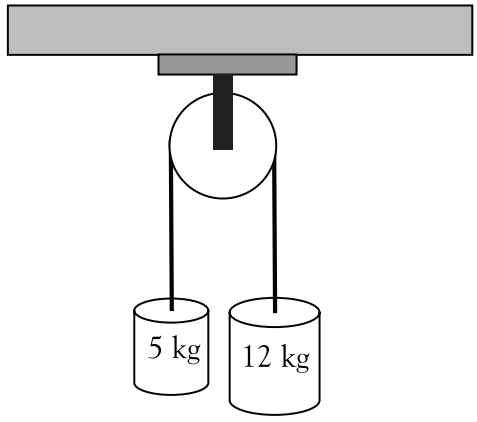


Figura 3.10.

9. Considere los tres bloques conectados que se muestran en el diagrama de la figura 3.11. Si el plano inclinado es sin fricción y el sistema esta en equilibrio, determine (en función de m, g y θ).
   a) La masa M.
   b) Las tensiones T_1 y T_2.

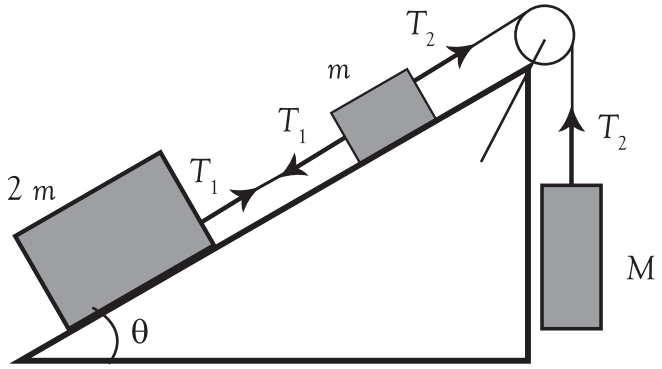


Figura 3.11.

10. Si se duplica el valor encontrado para la masa suspendida en el inciso a) del ejercicio anterior, determina:
    a) La aceleración de cada bloque.
    b) Las tensiones T_1 y T_2.

11. Una bolsa de cemento de 400 N de peso cuelgan de 3 alambres como muestra la figura 3.12. Dos de los alambres forman ángulos $\theta_1 = 70°$ y $\theta_2 = 30°$ respectivamente, con la horizontal.

Si el sistema esta en equilibrio encuentra las tensiones T_1, T_2 y T_3.

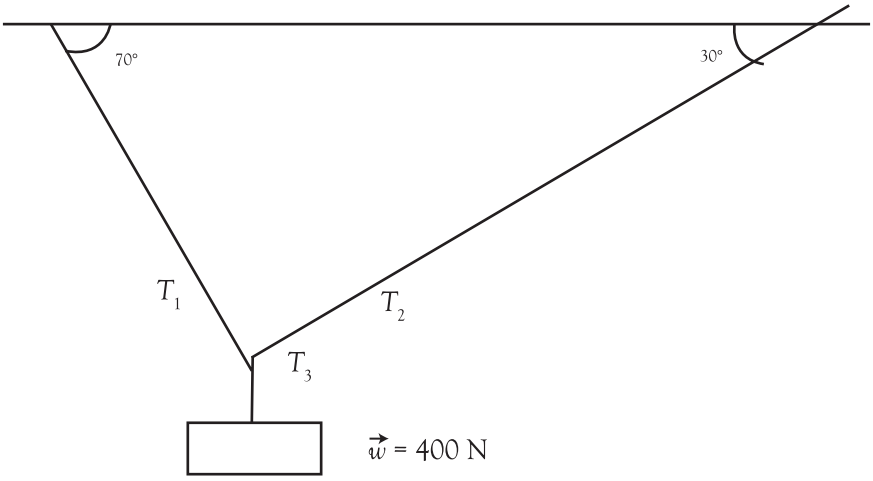


Figura 3.12.

12. El sistema que se indica en la figura 3.13 parte del reposo, si no hay ningún tipo de rozamiento y la polea es de peso despreciable, determina:
    a) La tensión de la cuerda.
    b) La aceleración de los bloques.
    c) La velocidad de los bloques al cabo de 3 segundos.

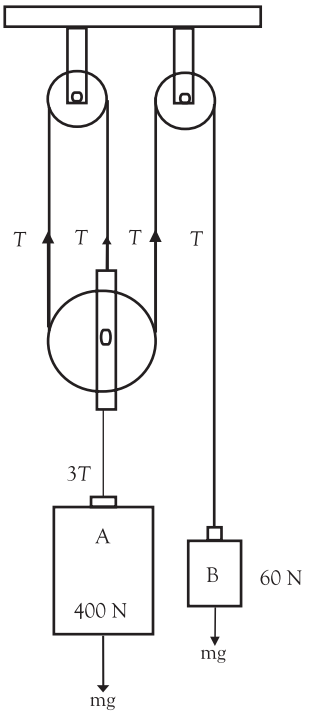


Figura 3.13.

Simbología

g = aceleración de la gravedad.
G = constante de la gravitación universal.
M = masa del planeta.
R = radio del 10planeta.
w = peso de un objeto.
F_G = fuerza gravitacional.
m = masa del objeto.
a = aceleración de un objeto.
F_k = fuerza de fricción cinética.
F_s = fuerza de fricción estática.
μ_k = coeficiente de fricción cinética.
μ_s = coeficiente de fricción estático.