

DIVERSAS APLICACIONES DE LA DERIVADA

Objetivos

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Utilizará la derivada de la función para encontrar diversos conceptos geométricos.
- Determinar los polinomios de Taylor y Maclaurin.
- Utilizará los teoremas de Rolle, del valor medio y la regla de L'Hopital, en resolución de ejercicios.
- Identificará los intervalos donde una función es creciente o decreciente, aplicando la derivada.

Introducción

De la geometría elemental, recordemos que una recta tangente a una circunferencia se define como aquella recta que toca a dicha circunferencia en un solo punto. Asimismo, una recta secante a una circunferencia es aquella que la corta y, por ende, la toca en dos puntos distintos. Esta definición de tangente no se puede aplicar a curvas abiertas ya que la tangente no necesariamente sólo la toca en el punto de tangencia.

Tampoco se puede definir la tangente como una recta que toca a una curva en un solo punto de tal manera que la curva se encuentre de un solo lado de la recta, ya que la recta que corta una curva abierta en el punto donde cambia el sentido de la trayectoria, la corta de modo que la curva queda en ambos lados de la recta, por lo que la única forma de resolver esta problemática es utilizando el concepto de límite de una función, con base en las aplicaciones siguientes.

4.1. Aplicaciones geométricas de la derivada

De la sección donde se vio la interpretación geométrica de la derivada, es importante recordar la definición de tangente a una curva en un punto P_1 de la misma. Supongamos una secante que pase por P_1 y un punto próximo P_2 de la curva, como se muestra en la figura 4.1. Hagamos que el punto P_2 se mueva sobre la curva aproximándose indefinidamente a P_1 , la secante girará alrededor de P_1 , y su posición límite es, por definición, la tangente a la curva en P_1 .

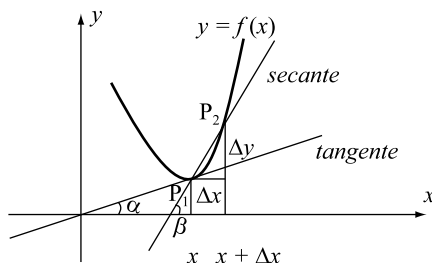


Figura 4.1.

Considerando ahora la gráfica de la función $y = f(x)$, figura 4.1, se procede a derivarla y a interpretar geométicamente cada paso. Para ello escogemos un punto $P_1(x, y)$ de la curva y un segundo punto $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$, también de la curva y cercano a P_1 .

Con este paso vemos que la razón de los incrementos Δx y Δy es igual a la pendiente de la secante determinada por los puntos $P_1(x, y)$ y $P_2(x+\Delta x, y+\Delta y)$. En la gráfica de la función se examina el sentido geométrico de este paso. Ahora se considera el valor de x como fijo. Luego P_1 es un punto fijo de la gráfica. Asimismo, Δx varía y tiende a cero. Por lo tanto, evidentemente, el punto P_2 se mueve a lo largo de la curva, aproximándose a P_1 por lo tanto la secante tiene como posición límite la tangente en P_1 .

En la figura 4.1 se observa que α es la inclinación de la tangente a la curva en el punto P_1 y β es la inclinación de la secante que pasa por los puntos P_1 y P_2 .

Luego entonces: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \tan \alpha$

Suponiendo que $\tan \beta$ es una función continua, tenemos que:

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \tan \alpha$, entonces $\frac{dy}{dx}$ es la pendiente de la tangente en el punto P_1 .

Así se logra establecer el resultado siguiente:

La pendiente de una curva en un punto determinado coincide con la dirección de la tangente a esa curva en ese mismo punto.

Ya se vio que la pendiente de la tangente a una curva, trazada en un punto $P(a, b)$, es igual al valor de la derivada de la función $y = f(x)$ en ese punto. Luego entonces, para obtener el valor de la pendiente se calcula $f'(x)$, y en ella se sustituyen las variables (x, y) por (a, b) , y se examina el valor que resulta para $f'(x)$.

Si:

- $f'(x) > 0$, la tangente en el punto P sigue la dirección del 3er. al 1er. cuadrante.
- $f'(x) < 0$, la curva sigue la dirección de 2o. a 4o. cuadrante.
- $f'(x) = 0$, la curva es paralela al eje x .
- $f'(x) = \infty$, la curva es perpendicular al eje x .

Ejemplo 1

Dada la función $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$:

- Da el intervalo en el cual sigue la dirección del 3er. al 1er. cuadrante.
- Da el intervalo en el cual sigue la dirección del 2o. al 4o. cuadrante.
- Da los puntos en que tiende a moverse paralelamente al eje x .
- Da los puntos en los cuales su pendiente = 2.
- Da los puntos en los cuales la pendiente = -1.

Solución

Se tiene que $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$, entonces $\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$, donde las raíces de $x^2 - x - 2 = 0$, son: $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$, por lo tanto:

a) $f'(x) > 0$, para $-\infty < x < -1$, y para $2 < x < \infty$; luego entonces, la curva sigue la dirección del 3º al 1º cuadrante en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$.

b) $f'(x) < 0$, para $-1 < x < 2$; la curva sigue la dirección del 2o. al 4o. cuadrante en el intervalo $(-1, 2)$.

c) $f'(x) = 0$, para $x = -1$ y para $x = 2$; por lo tanto, la curva tiende a moverse paralelamente al eje x en los puntos cuya abscisa es -1 y 2 .

d) La pendiente es 2 si se tiene $x^2 - x - 2 = 2$, lo cual se verifica en los puntos cuya abscisa es igual a $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

e) La pendiente es igual a -1 si se tiene: $x^2 - x - 2 = -1$, lo cual ocurre en los puntos cuya abscisa es igual a $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

4.1.1. Ecuaciones de la tangente y de la normal

En la unidad 3 y la sección anterior se ha definido la tangente a la gráfica de una función en un punto como la derivada de la función evaluada en dicho punto, esto es:

$\frac{dy}{dx} = m$, donde m es la pendiente de la tangente en el punto P_1 . Por lo tanto, si f es una función derivable en un punto x , la pendiente de la tangente a la gráfica de la función en el punto $(x, f(x))$ es la derivada de la función evaluada en dicho punto.

Ahora bien, de la geometría analítica, recordemos que la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Entonces la **ecuación de la recta tangente** a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Si la pendiente de la recta tangente es $+\infty$ o $-\infty$, entonces la recta tangente tendrá por ecuación $x = x_0$, es decir, que se tiene una recta vertical.

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la tangente a la gráfica

$$f(x) = \sin x + \csc x \text{ en } \left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Solución

Derivando la función $f(x) = \sin x + \csc x$ en $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, se tiene que:

$f'(x) = \cos x - \csc x \cot x$, ahora bien, evaluando la derivada en el punto dado se tiene que:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ además,}$$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{1+2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, luego entonces la ecuación de la tangente es:

$$y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ así que } y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ esto es}$$

$$\sqrt{2}y - 3 = -x + \frac{\pi}{4}, \text{ por lo tanto, la ecuación de la tangente a la gráfica es:}$$

$$x + \sqrt{2}y - 3 - \frac{\pi}{4} = 0$$

Ahora bien, la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y es perpendicular a la tangente se denomina recta normal a la gráfica en ese punto.

De la geometría analítica, recordemos que si dos rectas son perpendiculares y m es la pendiente de una de ellas, entonces la pendiente de la otra es menos el inverso de m ; esto es, $-\frac{1}{m}$, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es $f'(x_0)$, entonces la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{f'(x_0)}$ si $f'(x_0) \neq 0$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ si } f'(x_0) \neq 0$$

Si la recta es horizontal, su pendiente es cero, como $\frac{1}{0}$ no está definido, la ecuación de la normal es $x = x_0$. En caso de que la tangente sea vertical, es decir, si la pendiente es $+\infty$ o $-\infty$, entonces la normal tendrá pendiente cero y su ecuación será $y = f(x_0)$.

Ejemplo 3

Obtén la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$ en el punto $(1, f(1))$.

Solución

Se tiene que la ecuación de la normal es: $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$, donde $f'(x) = \frac{(2)(2x+3) - (2x-1)(2)}{(2x+3)^2}$, evaluando en $x = 1$ se tiene que:

$f'(1) = \frac{(2)(2+3) - (2)(2-1)}{25} = \frac{8}{25}$, ahora bien $f(1) = \frac{1}{5}$, por lo que sustituyendo en la ecuación de la normal se tiene: $y - \frac{1}{5} = -\frac{25}{8}(x - 1)$, esto es, $8y - \frac{8}{5} = -25x + 25$.

Por lo tanto, $25x + 8y - \frac{133}{5} = 0$ es la ecuación deseada.

4.1.2. Ángulo de intersección entre curvas

Haciendo referencia a la gráfica de una función en un punto cualquiera, su dirección está determinada por la que adquiere la tangente en dicho punto. Asimismo, si las gráficas de dos funciones se interceptan en un punto (x_0, y_0) , se define el ángulo de intersección entre ellas como el ángulo formado por sus tangentes en el punto en cuestión.

Recordando que la fórmula para obtener el ángulo de intersección entre dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2 , donde $m_1 \leq m_2$ es:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Entonces, si f y g son dos funciones derivables en x_0 y $f(x_0) = g(x_0)$, el ángulo de intersección entre sus gráficas está dado por

$$\tan \theta = \frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}; \text{ con } f'(x_0) \leq g'(x_0)$$

Ejemplo 4

Calcula el ángulo de intersección formado por las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 + 8; \quad g(x) = 2x^2 - x + 8$$

Solución

Dado que se busca un punto en común para ambas funciones, entonces, igualando ambas ecuaciones, se tiene: $x^3 + 8 = 2x^2 - x + 8$, entonces: $x^3 - 2x^2 + x = 0$, así que $x(x^2 - 2x + 1) = 0$, esto es, $x(x - 1)^2 = 0$ cuya solución es $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, los que al sustituirse en las funciones dadas proporcionan los puntos de intersección de ambas funciones: $(0, 8)$ y $(1, 9)$.

Ahora bien, $f'(x) = 3x^2$ y $g'(x) = 4x - 1$, entonces:

$$f'(0) = 0 \text{ y } g'(0) = -1; \text{ asimismo, } f'(1) = 3 \text{ y } g'(1) = 3$$

Así que el ángulo en el punto $(0, 8)$ está dado por

$$\tan \theta_1 = \frac{0 - (-1)}{1 + (-1)(0)} = 1, \text{ por lo tanto, } \theta_1 = 45^\circ$$

El ángulo en el punto $(1, 9)$ está dado por $\theta_2 = 0^\circ$

$$\tan \theta_2 = \frac{3-3}{1+3(3)} = \frac{0}{10} = 0, \text{ por lo tanto, } \theta_2 = 0^\circ$$

4.1.3. Centro y radio de curvatura

Se ha visto que la dirección de una curva plana en uno de sus puntos es la tangente a la curva en dicho punto. Si el punto de tangencia se desplaza sobre la curva, cambia la dirección de la tangente y la forma de la curva está directamente relacionada con la rapidez con que varía la pendiente de la tangente. La comparación del cambio de dirección con la trayectoria recorrida por el punto de tangencia sobre la curva ha dado origen a la idea de **curvatura** en la gráfica de la función, como se muestra en la figura 4.2.

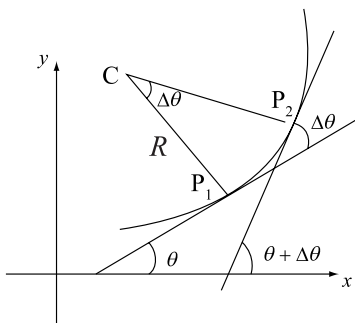


Figura 4.2.

Si se le llama θ al ángulo que forma la tangente en el punto P_1 con el eje x y $\theta + \Delta\theta$ al que forma con el mismo eje la tangente en el punto P_2 , el cual es un punto próximo a P_1 , entonces se puede considerar que la tangente en P_1 ha tenido un cambio en su dirección igual a $\Delta\theta$, y la curvatura del arco P_1P_2 depende de la magnitud de $\Delta\theta$.

Ahora bien, sea Δs la longitud del arco P_1P_2 , la razón $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ se denomina *curvatura media* de ese arco, y se da el nombre de curvatura al siguiente límite:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

La **curvatura** depende, en general, de la posición del punto en la gráfica y por ende es preciso expresar su valor en función de las variables x y y , así que:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$$

Lo que implica realizar el cálculo de $\frac{d\theta}{dx}$ y de $\frac{ds}{dx}$.

Por la propiedad de la derivada se tiene que: si $\tan \theta = y'$, entonces $\theta = \arctan y'$,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d(\arctan y')}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2}$$

Por otra parte, considerando como un triángulo rectángulo de lados infinitesimales donde ds es la hipotenusa y sus lados horizontal y vertical dx y dy , respectivamente, se tiene que

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Ahora, dividiendo ambos miembros entre dx :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dx} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dx)^2}} = \sqrt{1 + (y')^2}$$

Sustituyendo $\frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2}$ y $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}$ en $\frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$ se obtiene la ecuación

de la curvatura en el punto P_1 , esto es, $k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$

Ahora bien, considerando el punto P_2 suficientemente próximo al punto P_1 de la figura 4.2 se tiene que el arco $P_1 P_2$ puede considerarse como perteneciente a una circunferencia de centro C y de radio $CP_1 = R$. Recordando que el radio multiplicado por el ángulo, expresado en radianes, es igual al arco, se tiene:

$$R\Delta\theta = \Delta s; \text{ entonces, } R = \frac{\Delta s}{\Delta\theta}, \text{ asimismo, } \frac{1}{R} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

Tomando el límite cuando Δs tiende a cero, se tiene:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{1}{R}, \text{ así que } R = \left| \frac{ds}{d\theta} \right| = \left| \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''} \right|$$

Este radio R se denomina **radio de curvatura** de la función en el punto P_1 y el círculo de radio R es el **círculo de curvatura**. De aquí se observa que el valor del radio de curvatura en un punto determinado es el recíproco del valor de esa curvatura.

Ejemplo 5

Obtén el radio de curvatura en los vértices $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución

Se tiene que: $y' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$, entonces

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{y - xy'}{y^2} \right) = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{y + \frac{b^2 x^2}{a^2 y}}{y^2} \right) = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{a^2 y^3} \right); \text{ de la ecuación de}$$

la elipse se tiene que $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, entonces $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$, luego, dado que

$$R = \left| \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''} \right|, \text{ entonces:}$$

$$R = \left| \frac{\left(1 + \left(\frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right) \right)^{3/2}}{\frac{b^4}{a^2 y^3}} \right| = \left| \frac{\frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}{a^6 y^3}}{\frac{b^4}{a^2 y^3}} \right| = \left| \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}{a^4 b^4} \right|$$

Tomando el valor absoluto de R en los puntos deseados se tiene que:

$$R_A = \left| \frac{(a^2 b^4)^{3/2}}{a^4 b^4} \right| = \left| \frac{b^2}{a} \right|$$

$$R_B = \left| \frac{(a^4 b^2)^{3/2}}{a^4 b^4} \right| = \left| \frac{a^2}{b} \right|$$

4.1.4. Ecuaciones paramétricas

Ahora bien, en este apartado se estudiará la representación paramétrica de algunas funciones, así como la regla para derivar una función dada paramétricamente, para tal efecto consideremos las ecuaciones siguientes:

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

donde f y g son funciones y t toma valores dentro de un intervalo $[T_1, T_2]$, y además, x y y son las coordenadas de un punto en el plano cartesiano, por lo que a cada valor de t le corresponderá un punto determinado del plano. Consecuentemente, este punto describe cierta curva cuando t varía de T_1 hasta T_2 , así tenemos la siguiente definición:

Definición Las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ se denominan **ecuaciones paramétricas** de una curva; t recibe el nombre de parámetro y el método de dar la curva mediante estas ecuaciones se denomina *método paramétrico*.

Para derivar una función dada en forma paramétrica es necesario que las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ que son la representación paramétrica de la función sean derivables y que la función $x = f(t)$, tenga una inversa $t = F(x)$ que, también sea derivable. Entonces, la función $y = h(t)$, definida por las ecuaciones paramétricas, puede ser interpretada como una función compuesta, esto es:

$y = g(t)$, $t = F(x)$. De acuerdo con la regla para derivar funciones compuestas se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dg(t)}{dt} \frac{dF(x)}{dx}, \text{ además para la función inversa se tiene que}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df(t)}{dt}}$$

Luego entonces, la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ es útil para obtener la derivada de una

función dada en su forma paramétrica sin necesidad de recurrir a la expresión de la dependencia directa de y en función de x .

Ejemplo 6

Calcula la derivada de la función dada por las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad \text{donde } 0 \leq t \leq \pi.$$

a) Para cualquier valor de t

b) Para $t = \frac{\pi}{4}$.

Solución

a) Utilizando la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d(a \sin t)}{dt}}{\frac{d(a \cos t)}{dt}} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\cot t, \quad \text{por lo tanto, } \frac{dy}{dx} = -\cot t$$

b) Evaluando el resultado del inciso anterior en $t = \frac{\pi}{4}$, dado que $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = -\cot t$, se tiene que: $f'(\pi/4) = -\cot(\pi/4) = -1$

Por lo tanto, $f'(\pi/4) = -1$

Ejemplo 7

Obtén el radio de curvatura de un astroide dada por sus ecuaciones paramétricas $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$.

Solución

En este caso se debe proceder de la siguiente forma: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$, teniendo en cuenta que θ es función de x , se tiene que:

$$y'' = \left[\frac{\frac{dx}{d\theta} \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} \right) - \frac{dy}{d\theta} \left(\frac{d^2 x}{d\theta^2} \right)}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2} \right] \frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dx}{d\theta} \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} \right) - \frac{dy}{d\theta} \left(\frac{d^2 x}{d\theta^2} \right)}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^3}, \text{ aplicando estos}$$

resultados:

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a \cos^2 \theta \sin \theta; \quad \frac{dy}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta \cos \theta; \text{ entonces } y' = -\tan \theta$$

Para obtener y'' se tienen dos alternativas, aplicar la fórmula obtenida o derivar y' , entonces:

$$y'' = -\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{\sec^2 \theta}{3a \cos^2 \theta \sin \theta} = \frac{1}{3a \cos^4 \theta \sin \theta}; \text{ sustituyendo en}$$

$$R = \left| \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''} \right|, \text{ se tiene que:}$$

$$R = \left| \frac{(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}}{\frac{1}{3a \cos^4 \theta \sin \theta}} \right| = 3a \sin \theta \cos \theta, \text{ por lo tanto, } R = 3a \sin \theta \cos \theta$$

Ejercicio 1

1. Halla la ecuación de la tangente y normal de la función $y^3 = x^2 + 7$ en $P = (1, 2)$.
2. Halla los ángulos de intersección de las curvas $y^2 = 4x$ y $2x^2 = 12 - 5y$
3. Determina el ángulo de intersección del siguiente par de curvas:

$$y = 5 \cos \theta, \quad y = 5 \sin \theta$$

4. Encuentra el radio de curvatura de la función $y = e^{-x}$ en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

5. Halla el valor R correspondiente al punto $(2, 1)$ de la hipérbola $x^2 + 4xy - 2y^2 = 0$

4.2. Polinomio de Taylor y de Maclaurin

El objetivo de esta sección es enseñar a usar las funciones polinómicas como aproximaciones de otras funciones elementales. Para hallar una función polinómica $P(x)$ que aproxime a otra función $f(x)$, empezamos eligiendo un número c en el dominio de $f(x)$ en el que $P(x)$ tomará el mismo valor, es decir, $P(c) = f(c)$ (las gráficas de f y P pasan por $(c, f(c))$).

Se dirá que la aproximación polinómica está *centrada en c* .

Geométricamente, exigir $P(c) = f(c)$ significa obligar a la gráfica de $P(x)$ que pase por $(c, f(c))$. Hay muchos polinomios que satisfacen esa condición. Nuestro objetivo consiste en encontrar uno cuya gráfica sea parecida a la de $f(x)$ en las proximidades de c .

Una forma de lograrlo consiste en imponer que el valor de $f(x)$ y de sus n primeras derivadas deben coincidir con las de $P(x)$ y sus derivadas en $x = c$, esto es:

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad \frac{f''(c)}{2!} = a_2, \dots, \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = a_n,$$

$$\text{donde } P(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n$$

Con estos coeficientes llegamos a la definición de los polinomios de Taylor, así llamados en honor al matemático inglés Brook Taylor, y de los polinomios de Maclaurin, que llevan el nombre de otro matemático inglés, Colin Maclaurin (1698-1746).

Definición. Si $f(x)$ tiene n derivadas en c , el polinomio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

se llama **polinomio de Taylor de grado n de $f(x)$ en c** .

Si $c = 0$, entonces

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

se llama polinomio de Maclaurin de grado n de $f(x)$

Ejemplo 8

Halla el polinomio de Taylor de grado 4 para $f(x) = \ln x$ en $c = 1$.

Solución. Desarrollando respecto a $c = 1$ obtenemos:

$$f(x) = \ln x \quad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{x^3} \quad f'''(1) = 2$$

$$f^{iv}(x) = -\frac{3!}{x^4} \quad f^{iv}(1) = -6$$

Por consiguiente, el polinomio de Taylor de orden 4 es:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{iv}(1)}{4!}(x-1)^4 \\ &= -1 + x - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \end{aligned}$$

Ejemplo 9

Halla el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \cos x$ en $c = 0$ obtenemos:

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\
 f'(x) = -\operatorname{sen} x & f'(0) = 0 \\
 f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\
 f'''(x) = \operatorname{sen} x & f'''(0) = 0 \\
 f^{iv}(x) = \cos x & f^{iv}(0) = 1 \\
 f^v(x) = -\operatorname{sen} x & f^v(0) = 0
 \end{array}$$

Por consiguiente, el polinomio de Maclaurin de grado 5 es:

$$\begin{aligned}
 P_5(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^v(0)}{5!}x^5 \\
 &= 1 + 0x - \frac{1}{2!}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + 0x^5 \\
 &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4
 \end{aligned}$$

Ejemplo 10

Halla el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x) = \sqrt{x}$ en $c = 4$.

Solución

Desarrollando respecto a $c = 4$ obtenemos:

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \sqrt{x} & f(4) = 2 \\
 f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & f'(4) = \frac{1}{4} \\
 f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} & f''(4) = -\frac{1}{32} \\
 f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}} & f'''(4) = \frac{3}{256}
 \end{array}$$

Por consiguiente, el polinomio de Taylor de grado 3 es:

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 \\
 &= 2 + \frac{(x-4)}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}
 \end{aligned}$$

En el cálculo diferencial existen tres teoremas muy importantes para la obtención de algunas derivadas, los cuales se enunciarán a continuación.

4.3. Teorema de Rolle

Teorema de Rolle. Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores de éste, siendo cero en los extremos $x = a$ y $x = b$, $[f(a) = f(b) = 0]$, entonces, dentro del intervalo $[a, b]$ existe por lo menos un punto $x = c$, $a < c < b$, en el que la derivada $f'(x)$ se hace cero, es decir, $f'(c) = 0$.

Para mostrar la validez del teorema de Rolle se considera a la función $f(x)$ continua sobre el intervalo $[a, b]$, la cual debe tener en este intervalo un valor máximo M y un valor mínimo m . Si $M = m$, la función $f(x)$ es constante, es decir, tiene un valor constante $f(x) = m$ para todos los valores de x . Pero, en este caso, en cualquier punto del segmento $f'(x) = 0$ y, por lo tanto, el teorema se cumple. Supongamos ahora que $M \neq m$, entonces, por lo menos uno de estos números no es igual a cero.

Para concretar, supongamos que $M > 0$ y que la función toma su valor máximo cuando $x = c$, es decir, $f(c) = M$. Observemos que c es diferente de a y de b ya que, según la condición $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Si $f(c)$ es el valor máximo de la función, entonces $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, tanto para $\Delta x > 0$, como para $\Delta x < 0$. De lo que se deduce que:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x > 0;$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x < 0.$$

Ya que, según la hipótesis del teorema, existe la derivada en el punto $x = c$, entonces, pasando al límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0, \quad \text{cuando } \Delta x > 0;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0, \quad \text{cuando } \Delta x < 0.$$

Pero los resultados $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$ son compatibles sólo para el caso en que $f'(c) = 0$. Por lo tanto, dentro del segmento $[a, b]$ hay un punto c en el cual la derivada $f'(c) = 0$.

Observación: El teorema de Rolle también es válido para una función derivable que en los extremos del segmento $[a, b]$ no se reduzca a cero, sino que tome valores $f(a) = f(b)$, lo cual se puede mostrar análogamente al caso anterior. Asimismo, si la función $f(x)$ es tal que no tiene derivada en todos los puntos del intervalo $[a, b]$, el teorema puede ser falso; es decir, que en este caso en el intervalo $[a, b]$ puede no existir un punto c en el que la derivada $f'(x)$ sea cero.

Ejemplo 11

Realiza la gráfica representativa de la función $y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ y muestra si cumple el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución

En la figura 4.3 se observa que la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y además vale cero en los extremos, esto es:

$$f(-1) = 1 - \sqrt[3]{(-1)^2} = 0; \quad f(1) = 1 - \sqrt[3]{(1)^2} = 0.$$

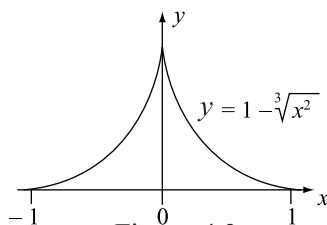


Figura 4.3

Sin embargo, la derivada $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, no toma el valor cero dentro del intervalo. Esto se debe a que dentro del intervalo existe un punto $x = 0$, en el cual no existe la derivada, esto es, $f'(0) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{0}} = -\frac{2}{0}$.

Por lo tanto, no cumple con el teorema de Rolle.

4.3.1. Teorema del valor medio

Teorema del valor medio. Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores del mismo, existirá por lo menos un punto $x = c$ dentro del intervalo $[a, b]$ $a < c < b$, en el que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Para mostrar la validez del teorema del valor medio se designará el siguiente número:

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Examinaremos la función auxiliar $F(x)$ determinada por la igualdad:

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$$

donde el significado geométrico de la función $F(x)$ se observa en la figura 4.4, para ello escribamos primero la ecuación de la cuerda AB teniendo en cuenta que su pendiente es igual a

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

y que la cuerda pasa por el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = Q(x - a), \text{ donde } y = f(a) + Q(x - a)$$

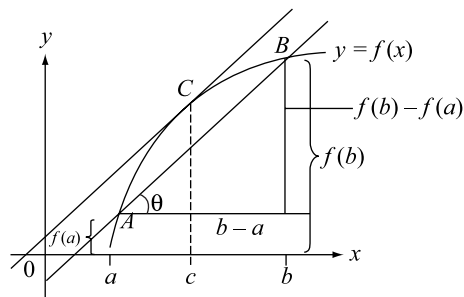


Figura 4.4.

Pero $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x-a)]$; por lo tanto, para cada valor de x , $F(x)$ es igual a la diferencia entre las ordenadas de la curva $y = f(x)$ y la cuerda $y = f(a) + Q(x-a)$, para los puntos de una misma abscisa x .

Es fácil ver que $F(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$, derivable en su interior y se reduce a cero en los extremos, es decir, $F(a) = 0$, $F(b) = 0$, por eso, a la función $F(x)$ se le puede aplicar el teorema de Rolle, según el cual dentro del segmento existe un punto $x = c$, de tal manera que:

$F'(c) = 0$, pero $F'(x) = f'(x) - Q$, es decir, $F'(c) = f'(c) - Q = 0$, de donde $Q = f'(c)$. Sustituyendo el valor de Q en la igualdad $Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ se tiene que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

de donde se deduce que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$; así queda demostrado el *teorema del valor medio*.

Ejemplo 12

Dada la función $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, verifica si se cumple el teorema del valor medio para el intervalo $[1, 3]$ y encuentra todos los números c en el intervalo $(1, 3)$ tales que:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

Solución

Como f es una función polinomial, f es continua y diferenciable para todos los valores de x . Por lo tanto, se cumple el teorema del valor medio para cualesquiera a y b .

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3; \text{ asimismo, } f(1) = -7 \text{ y } f(3) = -27$$

$$\text{De aquí } f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2} = -10, \text{ estableciendo que}$$

$$f'(c) = -10, \text{ se obtiene}$$

$$3c^2 - 10c - 3 = -10; \Rightarrow 3c^2 - 10c + 7 = 0; \text{ entonces } (3c - 7)(c - 1) = 0$$

con lo que da $c = \frac{7}{3}$ y $c = 1$, pero como 1 no está en el intervalo abierto $(1, 3)$, el

único valor posible es $c = \frac{7}{3}$.

4.3.2. Regla de L'Hopital

En este apartado se presenta la forma para calcular límites que producen formas indeterminadas del tipo $0/0$. Este resultado es conocido como la regla de L'Hopital y es una herramienta relevante como se verá a continuación.

Regla de L'Hopital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas y derivables en el intervalo $[a, b]$. Supóngase que $g'(x) \neq 0$ en (a, b) y que además

$$\begin{array}{cc} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \\ \text{ó} & \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty & \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \end{array}$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ si este límite existe.}$$

También es válido el teorema si $f'(a) = g'(a) = 0$ y las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen las condiciones puestas sobre las funciones $f(x)$ y $g(x)$, según la hipótesis del teorema, entonces, aplicando la regla de L'Hopital para la razón $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, se obtiene la fórmula: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'''(x)}{g'''(x)}$, etcétera.

Ejemplo 13

Aplica la regla de L'Hopital para obtener los límites cuando $x \rightarrow 0$ de las siguientes funciones:

a) $\frac{\operatorname{sen} 5x}{3x}$

b) $\frac{\ln(1+x)}{x}$

c) $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

Solución

a) Se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 5x)}{\frac{d}{dx}(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{3x} = \frac{5}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \ln(1+x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

c) Se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x} - 2x)}{\frac{d}{dx}(x - \operatorname{sen} x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x} - 2)}{\frac{d}{dx}(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = 2$

4.4. Funciones crecientes y decrecientes

La finalidad de este apartado consiste en establecer un método general para el análisis de la variación de las funciones, ya que existe una serie de relaciones entre el comportamiento de crecimiento de una función y la derivada de ésta, los cuales serán enunciados a continuación.

Definición. Una función $f(x)$ derivable en $[a, b]$ es creciente en este intervalo si y sólo si su derivada es no negativa, es decir,

$$f'(x) \geq 0 \text{ en } [a, b]$$

Para mostrar la validez de la definición primero supongamos que $f(x)$ crece sobre el segmento $[a, b]$; demos a la variable x un incremento Δx y consideremos la razón

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como $f(x)$ es una función creciente, tenemos que:

$$f(x + \Delta x) \geq f(x) \quad \text{para } \Delta x > 0$$

$$f(x + \Delta x) \leq f(x) \quad \text{para } \Delta x < 0$$

En ambos casos $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$ y, por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$$

Ahora veamos la segunda parte de la definición. Sea $f'(x) > 0$ para todos los valores de x pertenecientes al intervalo (a, b) . Consideremos dos valores arbitrarios x_1 y x_2 , $x_1 < x_2$, pertenecientes al segmento $[a, b]$.

De acuerdo con el teorema del valor medio se tiene que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2$$

Puesto que $f'(\xi) \geq 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, lo que significa que $f(x)$ es una función creciente.

Existe un razonamiento análogo para las funciones decrecientes, si son derivables; éste se expresa de la siguiente forma:

Definición. Una función $f(x)$ es decreciente en $[a, b]$ si y sólo si $f'(x) \leq 0$ en (a, b) .

A continuación se resumirá en un cuadro esquemático: si f es una función derivable en un intervalo I se tiene que

Si para toda x en I	Entonces
$f'(x) = 0$	f es constante en I
$f'(x) > 0$	f es estrictamente creciente en I
$f'(x) < 0$	f es estrictamente decreciente en I
$f'(x) \geq 0$	f es creciente en I
$f'(x) \leq 0$	f es decreciente en I

Ejemplo 14

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Solución

Se tiene que la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ está definida y además es continua y derivable en todo los reales.

Ahora bien, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

Así, $f'(x) = 0$, si y sólo si, $x = 1$ o $x = -1$.

Luego entonces:

en $(-\infty, -1)$	$f'(x) > 0$; así que f es estrictamente creciente;
en $(-1, 1)$	$f'(x) < 0$; así que f es estrictamente decreciente;
en $(1, \infty)$	$f'(x) > 0$; así que f es estrictamente creciente.

Ejemplo 15

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

Solución

Se tiene que la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ está definida y además es continua y derivable en todos los reales.

Ahora bien, $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 2(x+2)(2x+1)(x-1)$.

Así, $f'(x) = 0$, si y sólo si, $x = -2$, $x = -1/2$ o $x = 1$.

Luego entonces:

en $(-\infty, -2)$	$f'(x) < 0$; así que f es estrictamente decreciente;
en $(-2, -1/2)$	$f'(x) > 0$; así que f es estrictamente creciente;
en $(-1/2, 1)$	$f'(x) < 0$; así que f es estrictamente decreciente;
en $(1, \infty)$	$f'(x) > 0$; así que f es estrictamente creciente.

4.4.1. Relación con el signo de la derivada

Las definiciones de función creciente y decreciente tienen la siguiente interpretación geométrica. Si la función $f(x)$ es creciente sobre el segmento $[a, b]$, la línea tangente a la curva $y = f(x)$, en cada punto del mismo, forma con el eje x un ángulo agudo α o en algunos puntos puede ser paralela al eje. La tangente de este ángulo no es negativa: $f'(x) = \tan \alpha \geq 0$, véase la figura 4.5a.

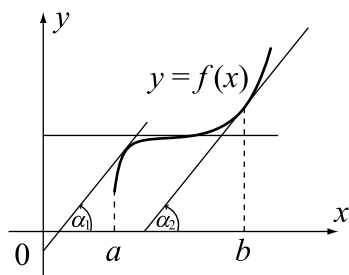


Figura 4.5a

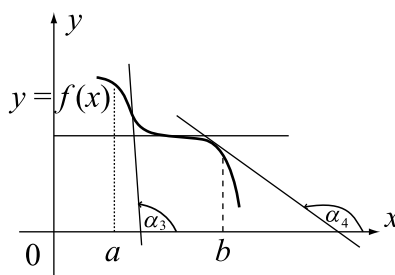


Figura 4.5b

Si la función $f(x)$ es decreciente sobre el segmento $[a, b]$, el ángulo de inclinación de la línea tangente a la curva $y = f(x)$ será obtuso, en algunos puntos puede ser

paralela al eje x . La tangente de este ángulo no es positiva: $f'(x) = \tan \alpha \leq 0$, véase la figura 4.5b.

De acuerdo con las definiciones de función creciente y decreciente se permite juzgar el crecimiento o decrecimiento de la función por el signo de la derivada.

Ejemplo 16

Determina los intervalos donde es creciente y decreciente la función $y = x^4$, utilizando el signo de la derivada.

Solución

Se tiene que la derivada de la función es $y' = 4x^3$, luego entonces, la derivada es mayor que cero, esto es, $y' > 0$, positiva para $x > 0$; es decir, la función crece en $(0, \infty)$, como se observa en la figura 4.6.

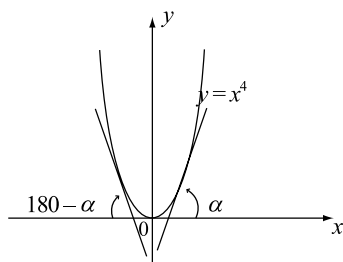


Figura 4.6.

Ahora bien, $y' < 0$ es negativa para $x < 0$, es decir, que la función decrece en $(-\infty, 0)$.

Ejemplo 17

Utilizando el signo de la derivada, determina dónde son crecientes y decrecientes las siguientes funciones:

- a) $y = \sqrt[3]{x}$
- b) $y = 2 - \sqrt[3]{(x-1)}$.

Solución

a) Se tiene que la derivada de la función $y = \sqrt[3]{x}$, es $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, es *siempre positiva* para toda $x \neq 0$ y tiende a infinito para $x = 0$.

Por lo tanto, es siempre creciente.

b) Se tiene que la derivada de la función $y = 2 - \sqrt[3]{(x-1)}$, es $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, es *siempre negativa* para todo valor de $x \neq 1$, y tiende a menos infinito para $x = 1$.

Por lo tanto, es siempre decreciente.

Existen también funciones siempre crecientes o siempre decrecientes cuya primera derivada se hace infinita para algún valor de la variable independiente, como las mostradas en el ejemplo anterior.

Ejercicio 2

1. Halla el polinomio de Taylor de grado 4 para $f(x) = \frac{1}{x}$ en $c = 1$.

2. Verifica si se cumple el teorema de Rolle para la función $f(x) = 4x^3 - 9x$, en el intervalo $[-3/2, 0]$ y encuentra un valor de c adecuado.

3. Dada la función $f(x) = x^{2/3}$, verifica si se cumple el teorema del valor medio para el intervalo $[-2, 2]$ y muestra si existe un número c en el intervalo $(-2, 2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

4. Aplicando la regla de L'Hopital calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x \sin x}$

5. Utilizando el signo de la derivada, determina dónde es creciente o decreciente la función $y = (x+3)^2(x-2)^3$

Ejercicios resueltos

1. Traza la recta normal a la curva $y = x \ln x$ que sea paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$

Solución

La gráfica de $y = x \ln x$ y de la recta $2x - 2y + 3 = 0$ se ilustra en la figura 4.7.

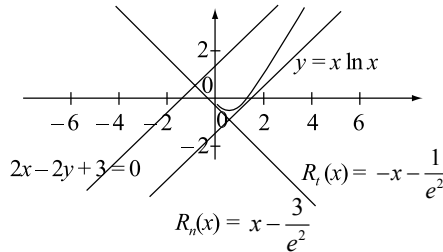


Figura 4.7.

Como la recta R_n normal es paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$, ésta debe tener la misma pendiente, así que, si m_n denota la pendiente de la recta normal, entonces $m_n = 1$, donde 1 es la pendiente de la recta dada, esto es, $y = x + \frac{3}{2}$.

Como R_n es normal a la curva dada y además la derivada de una función es la pendiente m_t de la recta tangente, entonces, dado que $y = x \ln x$, $y' = \ln x + 1 = m_t$. Ahora bien, el producto de las pendientes de las rectas normal y tangente $m_t m_n$ debe ser -1 , ya que son perpendiculares, esto es: $m_t m_n = -1$, así que, sustituyendo los valores de m_t y m_n se tiene que: $1(\ln x + 1) = -1$, por lo que, $\ln x = -2$, entonces, aplicando la función exponencial e , para poder despejar x se tiene; $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$, este valor de x es la abscisa que corresponde al punto de tangencia, que al sustituirlo en la función $y = x \ln x$, se obtiene:

$$y = \left(\frac{1}{e^2} \right) \ln \left(\frac{1}{e^2} \right) = \frac{1}{e^2} (\ln 1 - \ln e^2) = -\frac{2}{e^2}$$

El valor de la ordenada del punto de tangencia y , por tanto, la ecuación de la recta normal es:

$$R_n(x) = -\frac{2}{e^2} + 1 \left(x - \frac{1}{e^2} \right) = x - \frac{3}{e^2}$$

2. Halla la ecuación de la tangente y la normal de la siguiente función en el punto indicado:

$$y = 2x^3 + 3x^2 + 1 \text{ en } P(-2, -3)$$

Solución

Obtenemos la pendiente de la tangente derivando la función y calculándola en $x = -2$ $m = y'|_{-2} = 6x^2 + 6x|_{-2} = 6(-2)^2 + 6(-2) = 24 - 12 = 12$, sustituyendo en la ecuación de la tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$, m y $(-2, -3)$, entonces $y - (-3) = 12(x - (-2))$, desarrollando $y + 3 = 12(x + 2)$, $12x - y = -21$

La tangente y la normal cumplen las condiciones de perpendicularidad entre las rectas, es decir, que sus pendientes están relacionadas de la siguiente manera

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$, por lo que la ecuación de la normal es:

$$y + 3 = -\frac{1}{12}(x + 2), \text{ por lo que } 12(y + 3) = -1(x + 2), \text{ de donde}$$

$$12y + 36 = -x - 2, \text{ finalmente, } x + 12y = -38, \text{ que es la ecuación buscada.}$$

3. Obtén las ecuaciones de la tangente y la normal a $y = 2x^2 - 6x + 7$ en el punto P donde la pendiente de la tangente es 2.

Solución

En este caso primero se procede a derivar la función e igualar a 2, que es la pendiente dada, para obtener la coordenada en x , así que,

$y' = 4x - 6$ e igualando a 2 se tiene $4x - 6 = 2$, de lo que resulta $x = \frac{2+6}{4} = \frac{8}{4} = 2$, por lo tanto $x = 2$, que es la abscisa del punto P .

Sustituyendo este valor en la función para hallar el valor de la ordenada de dicho punto, resulta $y|_2 = 2(2)^2 - 6(2) + 7 = 2(4) - 12 + 7 = 8 - 12 + 7 = 15 - 12 = 3$, por lo tanto, $y = 3$, que es la ordenada del punto por lo que $P(2, 3)$.

Finalmente, empleando la ecuación de la recta tangente se tiene:

$y - 3 = 2(x - 2)$, entonces, $2x - 4 = y - 3$, donde $2x - y = 1$, es la ecuación de la

tangente y para la recta normal sólo se debe considerar la identidad $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ que se cumple entre rectas perpendiculares:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2), \text{ entonces, } 2(y - 3) = -1(x - 2), \quad 2y - 6 = -x + 2, \text{ ordenando}$$

$$x + 2y = 8, \text{ que es la ecuación de la recta normal.}$$

4. Encuentra la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{2x+3}$ en el punto $(1, f(1))$.

Solución

Derivando la función se tiene:

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)(2)(2x+3) - (2x-1)^2(2)}{(2x+3)^2}, \text{ evaluando en } x_0 = 1$$

$$f'(1) = \frac{2(1)(2)(5) - 2}{25} = \frac{18}{25} \text{ y } f(1) = \frac{(2(1)-1)^2}{2(1)+3} = \frac{(1)^2}{5} = \frac{1}{5}, \text{ por lo tanto, la ecuación}$$

de la tangente es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, sustituyendo valores $y - \frac{1}{5} = \frac{18}{25}(x - 1)$,

$$\text{haciendo un poco de álgebra } 25\left(y - \frac{1}{5}\right) = 18(x - 1) \quad 25y - 5 = 18x - 18,$$

donde $18x - 25y - 13 = 0$, es la ecuación buscada.

5. Encuentra la ecuación de la tangente de la función

$$f(x) = \sin x + \csc x \quad \text{en} \quad \left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Solución

Derivando la función se tiene $f'(x) = \cos x - \csc x \cot x$, sustituyendo la abscisa del punto en la derivada se obtiene

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} - \csc \frac{\pi}{4} \cot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1(\sqrt{2}) = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y evaluando $\frac{\pi}{4}$ en la función dada resulta:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{1+2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

la ecuación de la tangente es: $y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

sustituyendo valores resulta $y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

haciendo un poco de álgebra $\sqrt{2}\left(y - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -1\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

donde $\sqrt{2}y - 3 = -x + \frac{\pi}{4}$, y ordenando términos $x + \sqrt{2}y - 3 - \frac{\pi}{4} = 0$,

que es la ecuación buscada.

6. Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{2x+3}$ en el punto $(1, f(1))$.

Solución

Empleando la ecuación de la recta normal y sustituyendo los valores se tiene:

$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$, ecuación de la recta normal, sustituyendo los valores

obtenidos en el ejercicio 4 tenemos:

$y - \frac{1}{5} = -\frac{25}{18}(x - 1)$, donde $18\left(y - \frac{1}{5}\right) = -25(x - 1)$ y multiplicando todo por 5

$\left[18y - \frac{18}{5} = -25x + 25\right]5$, distribuyendo $90y - 18 = -125x + 125$, ordenando los términos $125x + 90y - 143 = 0$, que es la ecuación de la recta normal.

7. Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{csc} x \quad \text{en} \quad \left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Solución

Empleando la ecuación de la normal se tiene:

$$y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ sustituyendo los valores obtenidos en el ejercicio 5}$$

$$\text{tenemos } y - \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ simplificando } \left[y - \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}y - 3 = 2x - \frac{\pi}{2}, \text{ donde } 2x - \sqrt{2}y + 3 - \frac{\pi}{2} = 0 \text{ que es la ecuación buscada.}$$

8. Encuentra los ángulos de intersección entre las curvas $f(x) = x^3 + 8$ y $g(x) = 2x^2 - x + 8$.

Solución

Primero se resuelve el sistema de ecuaciones para determinar el punto de intersección de las curvas, en este caso se resolverá por igualación.

$$\text{Igualando se tiene } x^3 + 8 = 2x^2 - x + 8$$

$$\text{Ordenando términos } x^3 - 2x^2 + x + 8 - 8 = 0$$

Factorizando $x(x^2 - 2x + 1) = 0$, donde $x(x-1)^2 = 0$, igualando a cero cada uno de los factores resulta: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Sustituyendo el valor de x_1 en $f(x)$ y x_2 en $g(x)$ se obtienen las coordenadas de los puntos de intersección, esto es, dado que $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, entonces:

$f(0) = (0)^3 + 8 = 8$ y $g(1) = 2(1)^2 - 1 + 8 = 1 + 8 = 9$, donde los puntos de intersección son: $(0, 8)$ y $(1, 9)$. Ahora, evaluando la abscisa de cada punto en la derivada de cada una de las funciones

$$f'(x) = 3x^2 \text{ por lo que } f'(0) = 3(0)^2 = 0 \text{ y } f'(1) = 3(1)^2 = 3$$

$$g'(x) = 4x - 1 \text{ por lo que } g'(0) = 4(0) - 1 = -1 \text{ y } g'(1) = 4(1) - 1 = 4(1) - 1 = 3$$

$$\text{El ángulo en el punto } (0, 8) \text{ está dado por } \tan \alpha_1 = \frac{0 - (-1)}{1 + 1(0)} = 1,$$

$$\text{por lo tanto, } \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

El ángulo en el punto $(1, 9)$ está dado por

$$\tan \alpha_2 = \frac{3 - 3}{1 + 3(3)} = \frac{0}{9} = 0, \text{ por lo tanto, } \alpha_2 = 0$$

9. Halla los puntos sobre la gráfica de $y = x^3 - 15x^2 + 27x - 2$ en los cuales la pendiente es cero.

Solución

Como la derivada de la función es $y' = 3x^2 - 30x + 27$, factorizando para hallar las raíces de la ecuación $3(x-1)(x-9) = 0$ e igualando a cero cada factor resulta $3(x-1) = 0$ de aquí $x = \frac{3}{3} = 1$, donde $x = 1$ y $x - 9 = 0$, donde $x = 9$, y evaluando cada raíz en la función dada para obtener la ordenada de cada punto

$$\text{para } x = 1 \quad y = (1)^3 - 15(1)^2 + 27(1) - 2 = 11; \text{ y}$$

$$\text{para } x = 9 \quad y = (9)^3 - 15(9)^2 + 27(9) - 2 = 729 - 1215 + 243 - 2 = -245$$

Por lo tanto los puntos pedidos son $(1, 11)$ y $(9, -245)$.

10. Halla el ángulo de intersección de las circunferencias $A: x^2 + y^2 - 4x = 1$ y $B: x^2 + y^2 - 2y = 9$.

Solución

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones se halla que los puntos de intersección son $(3, 2)$ y $(1, -2)$.

Sea m_1 = pendiente de la tangente al círculo A en (x, y) .

Sea m_2 = pendiente de la tangente al círculo B en (x, y) .

Entonces de (A) resulta $m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y}$, según la derivación implícita

y de (B) $m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1-y}$, según la derivación implícita.

Sustituyendo las coordenadas del punto $(3, 2)$ en la ecuación de cada pendiente resulta

$$m_1 = \frac{2-x}{y} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ entonces}$$

$$m_1 = -\frac{1}{2} = \text{pendiente de la tangente a } (A) \text{ en } (3, 2).$$

$$m_2 = \frac{x}{1-y} = \frac{3}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3, \text{ entonces}$$

$m_2 = -3$ = pendiente de la tangente a (B) en $(3, 2)$.

La identidad para hallar el ángulo α entre dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2 es $\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ y sustituyendo los valores de las pendientes se tiene

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{1}{2} - (-3)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-3)} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1, \text{ donde } \alpha = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

por lo tanto $\alpha = 45^\circ$.

Procediendo de manera análoga para $(1, -2)$, sustituyendo los valores de las coordenadas de este punto en las derivadas implícitas se tiene

$$m_1 = \frac{2-x}{y} = \frac{2-1}{-2} = -\frac{1}{2}, \text{ entonces}$$

$$m_1 = -\frac{1}{2} = \text{pendiente de la tangente a } (A) \text{ en } (1, -2)$$

$$m_2 = \frac{x}{1-y} = \frac{1}{1-(-2)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \text{ entonces}$$

$$m_2 = \frac{1}{3} = \text{pendiente de la tangente a } (B) \text{ en } (1, -2)$$

La identidad para hallar el ángulo α entre dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2 es $\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ y sustituyendo los valores de las pendientes se tiene

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1, \text{ donde } \alpha = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

por lo tanto $\alpha = 45^\circ$.

11. Encuentra la curvatura en el punto (x, y) de la curva $y = x^2$.

Solución

En este caso $\frac{dy}{dx} = 2x$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$. Así, la curvatura en (x, y) es $\frac{2}{[1 + (2x)^2]^{\frac{3}{2}}}$

Donde la curvatura en $(0, 0)$ es 2, de ahí que cerca del origen la curva se asemeje a una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$. Cuando $|x|$ crece, la curvatura tiende a 0 y la curva se hace rectilínea.

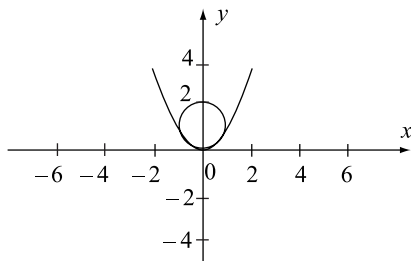


Figura 4.8.

12. Determina el radio de curvatura de la función del ejercicio 11.

Solución

De la definición de radio de curvatura:

$$\text{radio de curvatura} = \left| \frac{1}{\text{curvatura}} \right|$$

Por lo tanto, el radio de curvatura de la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ es

$$\text{radio de curvatura} = \left| \frac{1}{\frac{1}{2}} \right| = \left| \frac{2}{1} \right| = |2| = 2, \text{ por lo tanto, radio de curvatura} = 2$$

13. Empleando la regla de L'Hopital calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$

Solución

Tanto numerador como denominador tienden a ∞ cuando $x \rightarrow \infty$ con la regla de

$$\text{L'Hopital tenemos: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(\log x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

14. Si la curva C tiene una ecuación $xy=1$, encuentra el radio de curvatura de C en el punto $(1, 1)$.

Solución

Resolviendo para y obtenemos $y = \frac{1}{x}$. Derivando se tiene $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$.

Aplicando la ecuación que determina la curvatura

$$K = \frac{\left| \frac{2}{x^3} \right|}{\left[1 + \left(\frac{1}{x^4} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^6}{|x^3|(x^4+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^4}{|x|(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Como $R = \frac{1}{K}$

Ya que $R = \frac{|x|(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}{2x^4}$, así en $(1,1)$, $R = \sqrt{2}$.

15. Verifica el teorema de Rolle en el caso en que

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 \text{ y } [a, b] = [0, 2]$$

Solución

Observa que $f(0) = (0)^2 - 2(0) + 5 = 5$ y $f(2) = (2)^2 - 2(2) + 5 = 4 - 4 + 5 = 5$

Además f es continua y $\frac{df}{dx}$ existe (aun en a y b , aunque esto no es necesario para aplicar el teorema de Rolle). De acuerdo con el teorema de Rolle, existe una x en $(0, 2)$ tal que $\frac{df}{dx} = 0$. Es fácil encontrar tal x para esta función porque $\frac{df}{dx} = 2x - 2$. Igualando a cero la derivada se tiene $2x - 2 = 0$, entonces $2x = 2$, de donde $x = \frac{2}{2} = 1$, por lo que x es igual a 1, en este caso x es único debido a que la derivada de la función dada es de primer grado y, por lo tanto, sólo tiene una raíz.

16. Verifica el teorema de Rolle para el caso en que

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \text{ y } [a, b] = [-1, 1]$$

Solución

Aquí se tiene que al evaluar en los valores extremos del intervalo ocurre que:

$$f(-1) = \sqrt{1-(-1)^2} = \sqrt{1-1} = 0 \text{ y } f(1) = \sqrt{1-(1)^2} = \sqrt{1-1} = 0$$

también se tiene que en este intervalo f es continua y que $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(1-x^2)^{1/2}}{dx}$ y

$$\text{aplicando la regla de la cadena se tiene: } \frac{d(1-x^2)^{1/2}}{dx} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

la cual está definida para toda x de $(-1, 1)$. En tal caso, el teorema de Rolle garantiza que existe al menos un número x en $(-1, 1)$ tal que $\frac{df}{dx} = 0$; x se encuentra igualando a cero la derivada de f , esto es,

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \text{ entonces se tiene } -x = (0)\sqrt{1-x}, \text{ por lo que } x = 0.$$

Así, $x = 0$ resulta ser único.

La interpretación de la derivada como pendiente lleva al teorema de Rolle. El siguiente ejercicio considera el teorema de Rolle en términos de una partícula que se mueve sobre una recta.

17. Una partícula que se mueve sobre el eje y tiene una coordenada $y = f(t)$ en el tiempo t , donde f es una función derivable. Inicialmente, en tiempo $t = a$ su coordenada es $f(a)$. Durante cierto periodo se mueve sobre la recta y , finalmente, en el tiempo $t = b$ regresa a su posición inicial, esto es, $f(b) = f(a)$. ¿Qué nos asegura el teorema de Rolle en este caso?

Solución

El teorema de Rolle permite concluir que en algún tiempo t durante el periodo de movimiento la velocidad $\frac{df(t)}{dt}$ ha sido 0 al menos una vez.

Esto es razonable porque, si la velocidad hubiera sido siempre positiva, la partícula hubiera subido continuamente por el eje y sin poder regresar jamás a su posición inicial. Del mismo modo, la velocidad no podría haber sido siempre negativa porque la partícula, en tal caso, hubiera estado siempre bajando. Cuando la partícula cambia su velocidad de positiva a negativa, digamos en el punto más alto de su recorrido, tiene, momentáneamente, una velocidad 0.

18. Verifica el teorema del valor medio para $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$, $a = 1$ y $b = 3$

Solución

Evaluyendo primero a f en a y b , se tiene:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(1) = 2(1)^3 - 8(1) + 1 = 2 - 8 + 1 = -5 \\ \text{y } f(b) &= f(3) = 2(3)^3 - 8(3) + 1 = 54 - 24 + 1 = 31 \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio hay al menos un número c entre $a = 1$ y $b = 3$ tal que: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{31 - (-5)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$

Ahora se procede a determinar c explícitamente. Debido a que $f'(x) = 6x^2 - 8$, resolviendo la ecuación de segundo grado resultante e igualando a 18 se obtiene:

$6x^2 - 8 = 18$, entonces $6x^2 = 18 + 8$, donde $x^2 = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$, por lo que las soluciones son $\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$. Aunque, sólo está en $(1, 3)$. Luego únicamente hay un número, a saber, $\sqrt{\frac{13}{3}}$, que sirve como c cuya existencia está garantizada por el teorema del valor medio.

19. Un automóvil que se mueve sobre el eje x tiene una coordenada c igual a $f(t)$ en el tiempo t . En el tiempo a su posición es $f(a)$. Más tarde, en el tiempo b , su posición es $f(b)$. ¿Qué asegura el teorema del valor medio?

Solución

En este caso el cociente que define el teorema del valor medio es igual al cambio de posición entre el cambio de tiempo, es decir,

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\text{cambio de posición}}{\text{cambio de tiempo}}$ o “velocidad media” en el intervalo de tiempo $[a, b]$.

El teorema del valor medio asegura que en algún momento de este periodo la velocidad tuvo que ser igual a esa velocidad media. Específicamente, si el automóvil recorrió 210 kilómetros en 3 horas, entonces el velocímetro tuvo que marcar, en algún momento, 70 kilómetros por hora.

$$\text{Esto es } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}} = \frac{210 \text{ km}}{3 \text{ hr}} = 70 \text{ km}$$

El teorema del valor medio se puede expresar de varias maneras. Por ejemplo, la igualdad

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es equivalente a $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ y, por lo tanto, a

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$$

20. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Solución

Esta función tiene como gráfica la semicircunferencia superior de la figura 4.9, por lo tanto, es evidente que f crece en $[-1, 0]$ y decrece en $[0, 1]$. Es posible conseguir esta información sin hacer referencia a la figura siguiente:

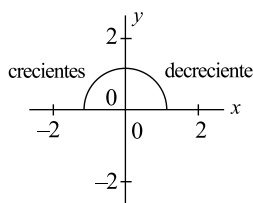


Figura 4.9.

Que f crece en $[-1, 0]$ puede verse sin más que considerar que la derivada

$$\frac{d(1 - x^2)^{1/2}}{dx} = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

es positiva para x en $(-1, 0)$. Que f decrece

en $[0, 1]$ puede verse a partir del hecho de que $\frac{df(x)}{dx}$ es negativa en $(0, 1)$.

21. Determina el valor de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Solución

La función dada tiene por derivada

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

puesto que $\frac{df(x)}{dx} < 0$ para todo $x \neq 0$ y f no está definida en 0, f decrece tanto en $(-\infty, 0)$ como en $(0, \infty)$ figura 4.10.

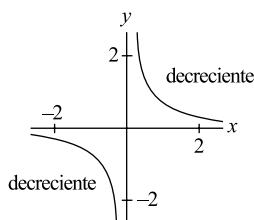


Figura 4.10

22. Determina los intervalos donde la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ es creciente o decreciente.

Solución

Derivando $\frac{df(x)}{dx} = 6x^2 - 18x + 12$ al igualar a cero obtenemos $6x^2 - 18x + 12 = 0$ las soluciones son $x = 2$, $x = 1$, por lo tanto, f es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(2, \infty)$ y decreciente en $(1, 2)$.

Ejercicios propuestos

1. Encuentra los ángulos de intersección entre las curvas dadas:

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x^2 + x + 5$$

2. Halla el polinomio de Maclaurin de grado $n = 3$ para $f(x) = e^{-x}$.

3. Halla el radio de curvatura en un punto cualquiera de la catenaria

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

4. Empleando la regla de L'Hopital, calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$

5. Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{(x-1)(1-x)}{x^2}$$

Autoevaluación

1. Halla la ecuación de la tangente y normal en la siguiente función en el punto indicado $y = x^{-\frac{2}{3}} - 3x^2 + x^{\frac{1}{4}} + 1$ en $P(1, 0)$:

- a) Tangente: $77x + 12y = 77$; normal: $12x - 77y = 12$
 b) Tangente: $77x - 12y = 77$; normal: $12x + 77y = 12$
 c) Tangente: $77x + 12y = -77$; normal: $12x - 77y = -12$
 d) Tangente: $79x + 14y = 79$; normal: $14x - 79y = 14$

2. Halla la ecuación de la tangente y normal en la siguiente función en el punto indicado $f(x) = x^3 + x + 2$, en $P = (2, f(2))$:

- a) Tangente $13x + y + 14 = 0$; normal $x - 13y + 158 = 0$
 b) Tangente $13x - y - 14 = 0$; normal $x + 13y - 158 = 0$
 c) $13x + y - 15 = 0$; normal $x - 13y - 156 = 0$
 d) $13x + y + 15 = 0$; normal $x + 13y - 159 = 0$

3. Aplica la fórmula de Maclaurin a la función $y = \sqrt{1+x}$, para $n = 3$:

- a) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2$, $0 < x < 3$
 b) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{18}x^3$, $-1 < x < 1$
 c) $\sqrt{1+x} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$, $0 < x < 1$
 d) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$, $0 < x < 1$

4. Halla el radio de curvatura de la función $2y = x^2$ en el punto $(0, 0)$:

- a) $R = -1$
 b) $R = -2$
 c) $R = 2$
 d) $R = 1$

5. Calcula la curvatura de la curva $6y = x^3$ en el punto $\left(2, \frac{4}{3}\right)$:

- a) $R = \frac{5}{2}\sqrt{5}$

b) $R = -\frac{5}{2}\sqrt{5}$

c) $R = \frac{5}{3}\sqrt{5}$

d) $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

6. Encuentra los ángulos de intersección entre las curvas dadas

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3 :$$

a) $\alpha_1 = \arctan(3), \quad \alpha_2 = \arctan\frac{7}{5}$

b) $\alpha_1 = \arctan(-5), \quad \alpha_2 = \arctan(-\frac{3}{5})$

c) $\alpha_1 = \arctan(-3), \quad \alpha_2 = \arctan\frac{3}{5}$

d) $\alpha_1 = \arctan(-2), \quad \alpha_2 = \arctan\frac{4}{5}$

7. Verifica si se cumple el teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$, en el intervalo $[1, 3]$ y encuentra un valor de c adecuado:

a) $c = \frac{3}{2}$

b) $c = \frac{5}{3}$

c) $c = \frac{5}{2}$

d) $c = 2$

8. Dada la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$, verifica si se cumple el teorema del valor medio para el segmento $[0, 1]$ y muestra que si existe un número c en el intervalo

$(0, 1)$ tal que: $f'(c) = \frac{f(0) - f(1)}{0 - 1}$

a) $c = \frac{1}{3}$

b) $c = \frac{1}{2}$

c) $c = \frac{3}{4}$

d) $c = \frac{2}{3}$

9. Aplicando la regla de L'Hopital calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{2}$

10. Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$:

a) Decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, \infty)$

b) Crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, \infty)$

c) Decrece en $(-\infty, 4)$ y crece en $(5, \infty)$

d) Crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, \infty)$

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

- 1) Tangente: $x - 6y = -11$, normal: $6x + y = 8$
- 2) $\alpha_1 = 83.67^\circ$ y $\alpha_2 = 46.08^\circ$
- 3) $\alpha = 148^\circ 24' 45''$
- 4) $e(1 + e^{-2})^{\frac{3}{2}}$
- 5) $R = \frac{2}{3}\sqrt{5}$

Ejercicio 2

- 1) $1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4$
- 2) Sí es válido $c = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- 3) No cumple con el teorema y no existe c
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x \sin x} = 1$
- 5) Crece en $(-\infty, -3)$ y $(-1, \infty)$, decrece en $(-3, -1)$.

Respuestas a los ejercicios propuestos

- 1) $\alpha_1 = \arctan(-3)$, $\alpha_2 = \arctan\left(\frac{1}{17}\right)$, $\alpha_3 = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$
- 2) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$
- 3) $R = \frac{y^2}{a}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$
- 5) No está definida en 0, crece en $(0, 1)$, decrece en $(1, +\infty)$ y en $(-\infty, 0)$

Respuestas a la autoevaluación

1. a) Tangente: $77x + 12y = 77$; normal $12x - 77y = 12$
2. b) Tangente $13x - y - 14 = 0$; normal $x + 13y - 158 = 0$
3. d) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3, 0 < x < 1$
4. d) $R = 1$
5. a) $R = \frac{5}{2}\sqrt{5}$
6. c) $\alpha_1 = \arctan(-3), \quad \alpha_2 = \arctan \frac{3}{5}$
7. d) $c = 2$
8. b) $c = \frac{1}{2}$
9. c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$
10. a) Decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, \infty)$