

CONTINUIDAD

Objetivos

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Identificará cuándo una función es continua en un punto y en un intervalo.
- Aplicará las operaciones de las funciones continuas en la resolución de ejercicios.
- Identificará cuándo una función es discontinua evitable o inevitable mediante el análisis de límites laterales.
- Resolverá ejercicios que involucren la utilización de las propiedades y criterios de continuidad y discontinuidad.

Introducción

En esta sección estudiaremos el concepto de **continuidad**, el cual está directamente relacionado con las propiedades geométricas de las funciones y con el concepto de límite, tratado en la unidad anterior; ambos son de gran relevancia para el estudio del cálculo diferencial e integral, por lo que conoceremos las propiedades de las funciones continuas y discontinuas, así como las diferentes maneras de analizarlas para lograr su adecuado entendimiento.

2.1. Continuidad de una función en un punto y en un intervalo

El término **continuidad** se deriva del estudio del movimiento de una partícula denominada móvil, que pasa de una posición a otra a lo largo de su trayectoria continua o no interrumpida. Ejemplos de continuidad los encontramos en los siguientes casos particulares: al analizar la trayectoria de un proyectil, la curva descrita por el movimiento de la Tierra en torno a su eje o al Sol, la caída libre de un cuerpo desde una altura determinada, entre otros fenómenos; con ejemplos como estos podemos expresar el desplazamiento con respecto al tiempo.

Ahora presentamos una definición matemática formal de los requerimientos para que la trayectoria de una función sea continua en un punto y en un intervalo. Asimismo, conoceremos operaciones que se pueden realizar con funciones continuas.

Definición. Una función $f(x)$ es **continua en un punto** x_0 si cumple las siguientes condiciones:

- La función debe estar definida en x_0 , es decir, debe existir $f(x_0)$.
- Debe existir el límite de la función cuando $x \rightarrow x_0$.
- Los valores de las condiciones anteriores deben coincidir, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Por lo tanto: $f(x)$ es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Si alguna de las tres condiciones anteriores no se cumple, la función es **discontinua** en x_0 .

En los dos ejemplos siguientes mostraremos cómo es que se determina la continuidad o discontinuidad de una función con base en las tres condiciones antes mencionadas.

Ejemplo 1

Determina si la función $f(x) = x^2 + 1$ es continua en $x_0 = 2$.

Solución

Evaluando la función en $f(x_0) = f(2) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Ahora, calculando el $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 4 + 1 = 5$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(x_0) = 5$. En consecuencia $f(x)$ es continua.

Ejemplo 2

Determina si la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua en $x_0 = 3$.

Solución

Evaluando la función en $f(x_0) = f(3) = \sqrt{4 - 9} = \sqrt{-5}$, se observa que:

La función no está definida en este punto por tanto es una función discontinua.

Estos ejemplos muestran la continuidad o discontinuidad en un punto, pero también existe la continuidad en todo un intervalo, por lo que damos la siguiente definición.

Definición. Cuando una función es continua en todos los puntos de un intervalo (a, b) se dice que una función es **continua en el intervalo** (a, b) .

Esta definición nos dice que una función es continua para todo punto que se encuentre dentro del intervalo si existen las tres condiciones de continuidad para cada uno de ellos.

Ejemplo 3

Determina la continuidad de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución

En el intervalo $[0,1]$ existe una infinidad de puntos para analizar la continuidad de la función, por lo que sólo elegiremos algunos puntos en particular:

a) Primero elegimos el punto cero:

$$\text{Evaluamos la función en } 0: \quad f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 5(0) - 1 = -1$$

$$\text{Ahora el límite en:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 3x^2 + 5x - 1) = -1$$

$$\text{Por lo tanto se tiene que:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$$

b) Ahora elegimos el punto 0.5:

$$\text{Evaluamos la función en } 0.5: \quad f(0.5) = (0.5)^3 - 3(0.5)^2 + 5(0.5) - 1 = 0.875$$

$$\text{Ahora el límite en:} \quad \lim_{x \rightarrow 0.5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0.5} (x^3 - 3x^2 + 5x - 1) = 0.875$$

$$\text{Por lo tanto se tiene que:} \quad \lim_{x \rightarrow 0.5} f(x) = f(0.5) = 0.875$$

c) Ahora elegimos el punto 1:

$$\text{Evaluamos la función en } 1: \quad f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 5(1) - 1 = 2$$

$$\text{Ahora el límite en:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 5x - 1) = 2$$

$$\text{Por lo tanto se tiene que:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$$

Si analizamos para cada punto concluimos que la función es continua en $[0, 1]$. Por definición los polinomios son continuos para cualquier punto del dominio.

Recordemos que al desarrollar operaciones con funciones obtenemos una nueva función, por lo que analizaremos cuando éstas conservan las condiciones de continuidad bajo las operaciones algebraicas. Esto es:

Teorema. Si f y g son funciones continuas en $x = x_0$, entonces las funciones cf (con c , un número real) $f \pm g$, $f \cdot g$ y (f / g) (con $g(x_0) \neq 0$) también son continuas en $x = x_0$.

Se demostrará para la suma.

La suma de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Demostración: se puede ver que si se consideran dos funciones f y g continuas en un punto x_0 , esto significa que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Para probar que la suma de funciones $f + g$ es una función continua en x_0 es necesario demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0)$$

Aplicando los teoremas de los límites de funciones,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ &= f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0) \end{aligned}$$

La demostración es válida para la suma de n funciones continuas en x_0 .

Ejemplo 4

Si $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Muestra si las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f/g son continuas en $x_0 = 3$:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (f + g)(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (f - g)(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$

Solución

Se tiene que: $f(3) = (3)^2 + 2 = 11$ y $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = (3)^2 + 2 = 11$; asimismo,

$g(3) = \frac{1}{3}$ y $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{3}$, entonces:

$$\text{a) } (f + g)(3) = f(3) + g(3) = 11 + \frac{1}{3} = \frac{34}{3}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 11 + \frac{1}{3} = \frac{34}{3}$$

$$\text{b) } (f - g)(3) = f(3) - g(3) = 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\text{c) } (f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3) = 11 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 11 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{d) } \left(\frac{f}{g} \right) (3) = \frac{11}{\frac{1}{3}} = 33$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{11}{\frac{1}{3}} = 33$$

Por lo tanto, en todos los casos se observa que las funciones son continuas en $x_0 = 3$.

La operación de funciones que nos falta analizar es la continuidad de la composición de funciones.

Teorema. Si f es una función continua en x_0 y g es otra función continua en $f(x_0)$, la función compuesta $g \circ f$ es continua en el punto x_0 .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [g(f(x))] = \lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) \\ &= g(f(x_0)) = g \circ f(x_0)\end{aligned}$$

La continuidad en la composición de funciones nos dice que la continuidad debe darse en las dos funciones, ya que si en una de ellas se da la discontinuidad, también la composición es discontinua, como se analiza en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, muestra en qué puntos es discontinua la composición de funciones $(g \circ f)(x)$.

Solución

Observemos que para la función $f(x) = x^2 - 1$ no existe discontinuidad, y en la función $g(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $x=0$ no está definida. Mientras que la composición de funciones dada por: $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, es discontinua en los puntos $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$.

2.2. Propiedades de las funciones continuas

En este apartado se muestran las propiedades que deben cumplir las funciones para ser continuas. Asimismo, se analizará la continuidad de funciones elementales y se estudiará la clasificación de los puntos de discontinuidad evitable e inevitable.

Función definida por intervalos

Una función continua en x_0 definida por partes satisface que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Ejemplo 6

Di si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x > 0 \\ x & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$

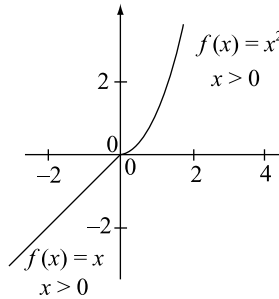


Figura 2.1.

Solución

Analicemos la función en el límite lateral izquierdo. Por definición de la función determinamos que x toma los valores menores de cero, esto es:

$f(x) = x$ para $x < 0$ y el límite por calcular será:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = 0$$

lo siguiente es determinar el límite lateral derecho:

$f(x) = x^2$ para $x > 0$ y su límite es dado por:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0$$

de esto se observa que los límite laterales son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0$$

como $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ se concluye que la función es continua en $x = 0$

Ahora estudiaremos diferentes funciones que cumplen con lo establecido en la definición anterior y, por lo tanto, son funciones continuas:

Función constante

La función constante $f(x) = k$ es continua en todos los puntos.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k = f(x_0)$$

Función identidad

La función identidad $f(x) = x$ es continua en todos los puntos.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = f(x_0)$$

Función potencia

La función potencia $f(x) = x^n$ $n > 0$ es continua en todos sus puntos.

Dado que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n = f(x_0)$

Función polinómica

La función $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, es una función continua en todos sus puntos, por ser la suma de funciones continuas en todos los puntos.

Evaluando en x_0 se obtiene que: $f(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n$, por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0)$$

Función racional

La función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas, es continua en todos los puntos, salvo en los que el denominador se anula, por ser un cociente de dos funciones continuas.

Función exponencial

La función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$, es continua en todos los puntos.

Dado que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} = f(x_0)$

Función logarítmica

La función $f(x) = \log_a x$, siendo $a > 1$, es continua en todos los puntos de su campo de existencia $(0, +\infty)$.

Dado que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 = f(x_0)$

Analicemos un ejemplo específico de las funciones mencionadas anteriormente, en particular el de función racional.

Ejemplo 7

Indica en qué puntos la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x - 3}$ es discontinua.

Solución

La función es continua en todos los puntos salvo en los que se anula el denominador, ya que en éstos la función no estará definida; es decir, en $x = 3$.

Por lo tanto, la función es continua en todos los puntos salvo en $x = 3$, en el que es discontinua.

Al igual que la definición de continuidad en un punto por la derecha y por la izquierda se tiene la continuidad por laterales en un intervalo.

Definición. Se dice que una función es **continua en el intervalo** $[a, b]$ si es continua en todos los valores de un intervalo (a, b) y es continua por la derecha en $x = a$ y por la izquierda en $x = b$.

Para analizar las funciones continuas por intervalos laterales basta con demostrar la continuidad en cada uno de los puntos laterales del intervalo.

Ejemplo 8

Realiza un estudio e indica si la función $f(x) = \frac{x-5}{x^2-3x-10}$ es continua en los intervalos $(-3, 0)$ y $(0, 2)$.

Solución

La función es continua en todos los puntos, salvo en los que el denominador se anula. El denominador se anula en $x = -2$ y en $x = 5$.

Como el punto $x = -2$ está en el intervalo $(-3, 0)$, la función no es continua en todo el intervalo.

Como -2 y 5 son los dos únicos puntos de discontinuidad de la función y no pertenecen al intervalo $(0, 2)$, la función $f(x)$ sí es continua en este intervalo.

Existen funciones que al analizarlas por las tres condiciones de continuidad antes mencionadas, muestran que no son continuas por lo que se resume en el siguiente recuadro:

Para que una función $f(x)$ sea discontinua en un punto x_0 deberá darse al menos una de estas condiciones:

- a) f no está definida en x_0 .
- b) No existe $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ o no existe $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.
- c) Los límites laterales existen, pero $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.
- d) Existe el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, pero $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Dependiendo de qué condición se verifique, los puntos en los que una función no es continua se clasifican en puntos de *discontinuidad evitable* y en puntos de *discontinuidad inevitable*.

Definición. Una función presenta una **discontinuidad evitable** en un punto x_0 cuando, existiendo el límite de la función en éste, no coincide con el valor que toma la función en el punto **d)** o cuando no existe $f(x_0)$ **a)**. x_0 es un punto de discontinuidad evitable $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ o no existe $f(x_0)$.

La discontinuidad se puede evitar asignando a la función en el punto x_0 el valor de su límite. En este caso a $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ se le denomina valor verdadero de la función en x_0 , por lo que en este punto la discontinuidad se pierde y se obliga a que la función sea continua en ese punto.

Ejemplo 9

Realiza un estudio de los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \neq 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Solución

La función $x+2$ es continua en todos los puntos.

La función $f(x)$ es continua en todos los puntos salvo en $x = 1$; ya que $f(1) = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

Por lo que se da una discontinuidad evitable en $x = 1$ si se le asigna a $f(1)$ el valor 3, entonces $f(x)$ es continua en todos los puntos.

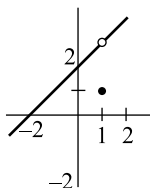


Figura 2.2.

El verdadero valor de la función f en $x = 1$ es 3.

En este ejemplo la discontinuidad se puede evitar debido a que para el punto de discontinuidad existen los límites laterales; sin embargo, existen funciones en las cuales no se puede anular la discontinuidad.

Definición. Una función presenta una **discontinuidad inevitable** en un punto x_0 cuando, o bien no existe algún límite lateral **b)**, o bien los límites laterales existen pero son distintos **c)**, en cuyo caso no existe el límite.

$$x_0 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable} \Leftrightarrow \begin{cases} i) \text{ No existe } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ o no existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ ii) \text{ Existen pero } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \end{cases}$$

En el siguiente ejemplo revisaremos las condiciones de discontinuidad inevitable.

Ejemplo 10

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 2x & x \leq 0 \end{cases} \text{ en } x = 0$$

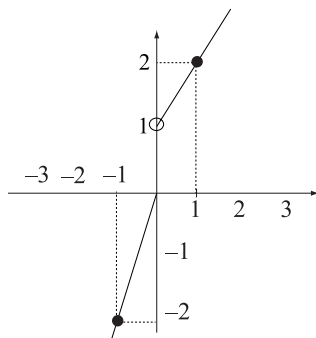


Figura 2.3.

Solución

Tomando los límites laterales tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2(x) = 0$$

por lo tanto no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y tiene una discontinuidad inevitable en $x = 0$.

Ejercicio 1

1. Verifica si la función $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ es o no es continua en $x = 1$.

2. Verifica si la función $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 5x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es o no es continua en $x = 0$.

3. Verifica si la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ es o no es continua en $x = 2$.

4. Determina el intervalo en el cual la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua.

5. Verifica si la función $f(x) = \frac{1}{x-4}$ es o no es continua en $x = 4$, si no lo es determina qué clase de discontinuidad tiene.

6. Verifica si la función $f(x) = \begin{cases} 3 & x = 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$; si no lo es

determina qué clase de discontinuidad tiene.

2.3. Gráficas de funciones continuas

Se dice que una función $f(x)$ es continua para un intervalo, cuando se puede **graficar de un solo trazo** para todos los valores de x en ese intervalo, como se muestra en la figura 2.4.

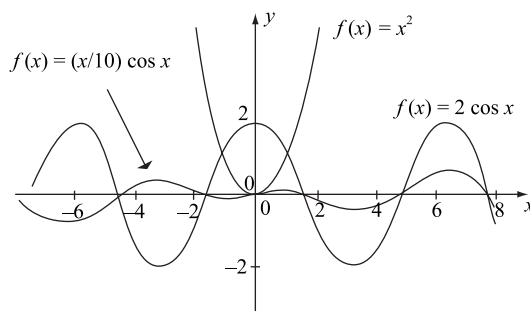


Figura 2.4.

La gráfica de la función $f(x) = x^2$ es continua para todo valor real de x . De igual forma las funciones $f(x) = 2 \cos x$ y $f(x) = (x/10) \cos x$, son continuas para todo valor real de x .

En la expresión gráfica de las tres funciones de la figura 2.4 se observa que pueden ser trazadas “sin despegar el lápiz”, por lo que son continuas para todos los valores de x . Asimismo, si al graficar una función observamos que se rompe la continuidad, esto significa que la función no puede tomar ciertos valores de x , por lo que se dice que es discontinua en esos valores.

De la gráfica de una función continua se deriva el siguiente teorema.

Teorema de valor intermedio. Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y c es un número real cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un valor x_0 que pertenece al intervalo $[a, b]$ tal que $f(x_0) = c$.

Este teorema afirma que si x toma todos los valores entre a y b , la función continua f debe tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Por lo tanto, si f es continua en un intervalo cerrado, no hay agujeros ni saltos en su gráfica.

Ejemplo 11

Dada la función definida por:

$$f(x) = x^2 - x - 8 \text{ en el intervalo } [-5, 5]$$

verifica el teorema del valor intermedio para $c=1$.

Solución

Evaluemos la función en los valores extremos del intervalo para mostrar que existe la función dentro de éste:

$$\text{En } x_0 = -5: f(x_0) = (-5)^2 - (-5) - 8 = 22$$

$$\text{En } x_0 = 5: f(x) = (5)^2 - (5) - 8 = 12$$

Esto muestra la existencia de la función en los extremos, sólo falta determinar su existencia en un punto intermedio. Ahora, evaluando la función en x_0 para el cual la función obtiene un valor de 1.

Por lo que tenemos:

$$f(x_0) = x_0^2 - x_0 - 8 = c = 1$$

de tal manera que:

$$x_0^2 - x_0 - 8 = 1$$

$$x_0^2 - x_0 - 9 = 0$$

Esto nos da:

$$x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Los dos valores son válidos porque se encuentran dentro del intervalo $[-5, 5]$. Este ejemplo nos muestra que el valor de $f(x_0)$ no es único.

2.4. Asíntotas horizontales y verticales

Al trazar la gráfica de una función se pueden encontrar, si es que las hay, las *asíntotas horizontales y verticales* de dicha gráfica, lo que se muestra a continuación:

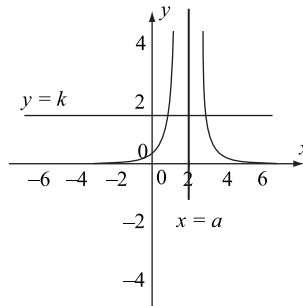


Figura 2.5.

Considérese la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \quad (1)$$

La figura 2.5 es una representación gráfica de $f(x)$.

Al trazar una recta paralela al eje x , por encima de éste, se observa que intercepta la gráfica en dos puntos: uno a la izquierda de la recta $x = a$ y otro a la derecha. Así, la recta $y = k$ intercepta la gráfica de $f(x)$ en dos puntos; donde la distancia de estos dos puntos a la recta $x = a$ se hace cada vez más pequeña a medida que k crece.

La recta $x = a$ se llama una *asíntota vertical* de $f(x)$, como se muestra en la figura 2.5.

Definición. Se dice que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función $f(x)$, si al menos una de las siguientes proposiciones es cierta:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

Para la función definida por la ecuación (1) las partes (i) y (iii) de la definición anterior son ciertas.

Si g es la función definida por $g(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$

entonces las partes (ii) y (iv) son ciertas, la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de g . Esto se muestra en la figura 2.6.

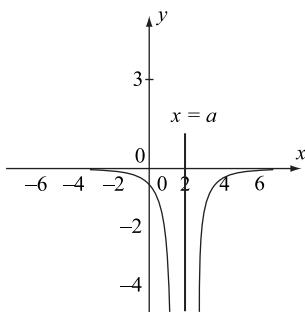


Figura 2.6

Definición. Se dice que la recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de la función f , si al menos una de las siguientes proposiciones es cierta:

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

Retomando la función (1), si tomamos el intervalo dado por $[-\infty, \infty]$ y calculamos los límites para esto, tenemos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, por lo que decimos que el eje de las abscisas es una asíntota horizontal para la función como se muestra en la figura 2.2.

Ejemplo 12

Encuentra las asíntotas horizontales de la función definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Solución

Primero se considera $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Para calcular este límite se escribe $x = \sqrt{x^2}$; ($x > 0$ ya que $x \rightarrow +\infty$) y, luego, dividiendo el numerador y el denominador, dentro del signo radical, por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2/x^2}}{\sqrt{(x^2 + 1)/x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^2})}} = 1$$

por lo tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Ahora considérese el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; en este caso se escribe $x = -\sqrt{x^2}$ ya que si $x \rightarrow -\infty$, $x < 0$. Así se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x^2})}} = -1$$

por lo tanto, la recta es una asíntota horizontal como se observa en la gráfica de la figura 2.7.

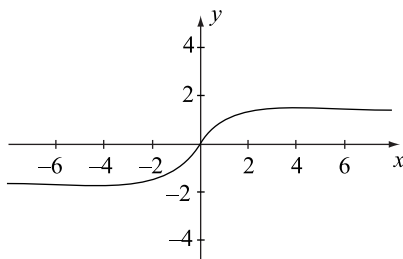


Figura 2.7.

2.5. Continuidad en intervalos

Este es un caso particular de la continuidad evitable e inevitable de funciones, por lo que sólo abordaremos con un par de ejemplos.

Ejemplo 13

Muestra que la función $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 3 \\ -1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$, es discontinua en $x_0 = 3$.

Solución

Para mostrar la discontinuidad de la función en $x_0 = 3$, se requiere verificar cuál de las tres condiciones de continuidad no se cumple. En este caso es la primera, ya que no existe el límite de la función cuando x tiende a 3; los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

Por lo tanto, la función es discontinua en $x_0 = 3$.

Ejemplo 14

Realiza un estudio de la discontinuidad, evitable o no, de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Solución

$f(x)$ es continua en todos los puntos salvo en $x = 3$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

De lo que observando los límites laterales se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

Por lo tanto la discontinuidad es inevitable.

Ejercicio 2

1. Indica dónde no es continua la siguiente función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 5, & \text{si } x = 3 \end{cases}$

2. Indica si es continua la siguiente función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$

3. Determina las asíntotas de la función $h(x) = \frac{4}{x - 5}$

4. Determina las asíntotas de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x - 6}$

5. Determina las asíntotas de la función $h(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 9}$

Ejercicios resueltos

1. Verifica si la función $f(x) = |2x + 4|$ es continua en $x = 0$.

Solución

Se tiene que: $f(0) = |0 + 4| = |4| = 4$; ahora bien, $\lim_{x \rightarrow 0} |2x + 4| = |2(0) + 4| = |4| = 4$

Luego entonces se verifica que el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 4$. En consecuencia $f(x)$ es continua.

2. Determina si la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ es continua.

Solución

De inmediato se tiene que en $f(-3)$ no está definida. Por lo tanto es una función discontinua. Al no estar definida en un punto no quiere decir que no tenga límite. En este ejemplo la función $f(x)$ tiene límite, el cual es:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-2) = -3 - 2 = -5$$

La función presenta un hueco en $x = -3$.

3. Verifica si la función $f(x) = \frac{x-8}{|x+8|}$ es continua.

Solución

Se tiene que $f(-8)$ no existe. Por lo tanto es discontinua.

4. Determina si la función $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$

Solución

Se tiene que $f(0) = 0$; ahora bien, el límite por la izquierda en cero es

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{x}{x} \right) = -1 \text{ y el límite por la derecha en cero es:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Como los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes y, además, $f(0) = 0$ no es igual al valor de los límites, tenemos que $f(x)$ es discontinua en $x = 0$.

5. Muestra que la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \neq 2 \\ 5, & \text{si } x = 2 \end{cases}$, es discontinua en $x_0 = 2$

Solución

Existe el límite de la función cuando x tiende a 2, ya que los dos límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2^2 - 1 = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2^2 - 1 = 3$$

La función está definida para $x = 2$ y vale 5: $f(2) = 5$. Sin embargo, el valor del límite de la función cuando $x \rightarrow 2$ no coincide con $f(2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \neq 5 = f(x). \text{ Por lo tanto, la función es discontinua en } x_0 = 2.$$

6. Verifica si la función $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, es continua en $x = 1$.

Solución

Se tiene que $f(1) = 4$; ahora bien,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+3) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-x) = 2.$$

Puesto que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, la función es discontinua en $x = 1$.

7. Muestra que la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 3 \\ x-2, & \text{si } x > 3 \end{cases}$, es discontinua en $x_0 = 3$.

Solución

En este caso existe el límite de la función cuando x tiende a 3 y es 1; ya que los dos límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 3-2 = 1$$

Sin embargo, la función no está definida en $x_0 = 3$; ya que no existe $f(3)$.

Por lo tanto, la función es discontinua en $x_0 = 3$.

8. Encuentra el valor de α que hace que la función $f(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{si } x \leq 4 \\ \alpha x-1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$, sea continua en todos los reales.

Solución

Calculando los límites laterales se tiene que $\lim_{x \rightarrow 4^-} (3x+7) = 19$ y $\lim_{x \rightarrow 4^+} (\alpha x-1) = 4\alpha-1$. Igualando ambos resultados $4\alpha-1=19$, entonces $\alpha=5$, así que:

Para $\alpha=5$ la función es continua en todos los reales.

9. Determina el valor de β que hace que la función $f(x) = \begin{cases} \beta x-1 & \text{si } x < 2 \\ \beta x^3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, sea continua en todos los reales.

Solución

Calculando los límites laterales se tiene que: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (\beta x-1) = 2\beta-1$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} (\beta x^3) = 8\beta$. Por lo tanto, igualando ambos resultados se obtiene: $8\beta = 2\beta-1$; entonces, $\beta = -\frac{1}{6}$ así que:

para $\beta = -\frac{1}{6}$ la función $f(x)$ es continua en todos los reales.

10. Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Solución

La función es continua en todos los puntos salvo en los que se anule el denominador: $x=2$

Ahora se procede a verificar si la discontinuidad en $x_0=2$ es evitable o no:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$$

El límite existe y es 4, por lo tanto la discontinuidad en $x_0 = 2$ es evitable. El verdadero valor de la función en $x_0 = 2$ es 4.

Asignando a $f(2)$ el valor 4, la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ es continua en

todos los puntos.

11. Determina las posibles asíntotas de la función dada por $y(x+1) = x^2(1-x)$

Solución

Rescribiendo la ecuación, es decir, despejando y se tiene:

$$y = \frac{x^2(1-x)}{x+1} = \frac{-x^3 + x^2}{x+1}$$

La determinación de sus asíntotas se logra analizando la ecuación anterior. Por lo tanto, $y \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow -1$. Ya que en este punto la función se indefine. Así que $x = -1$ es una asíntota vertical como se muestra en la siguiente gráfica:

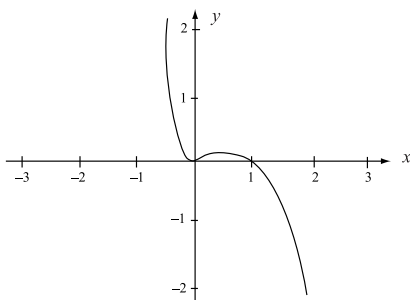


Figura 2.7.

12. Determina las posibles asíntotas de la función dada por $(x-2)(x-6)y = 2x^2$.

Solución

Rescribiendo la ecuación, es decir, despejando y resulta:

$$y = \frac{2x^2}{(x-2)(x-6)}$$

La determinación de sus asíntotas se logra analizando la ecuación anterior, para $y > 0$, cuando $x \rightarrow 2$, la función se indefine y $y \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow 6$ también $y \rightarrow \infty$ por lo que la función tiene dos asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = 6$, y horizontal $y = 2$.

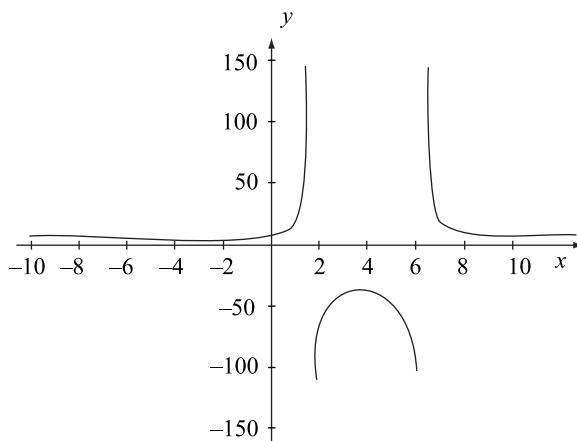


Figura 2.8.

Ejercicios propuestos

1. Determina las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

2. Determina si la función $f(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{si } t \leq 2 \\ t & \text{si } t > 2 \end{cases}$ es continua en $t = 2$

3. Determina dónde es continua la función $f(t) = \frac{\sqrt{t+1}}{2t+1}$

4. Determina los valores de la variable independiente en los cuales la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x \end{cases}$ es discontinua.

5. Determina los valores de la variable independiente en los cuales la función $g(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ 8-3x & \text{si } 1 < x < 2 \\ x+3 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$ es discontinua.

Autoevaluación

1. Indica si la función $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$
2. Indica dónde es continua la función $f(t) = \frac{t-1}{5}$
3. Indica dónde es continua la función $f(z) = |z+1|$
4. Indica dónde es continua la función $f(x) = \frac{20x+6}{x^2-1}$
5. Indica dónde es continua la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}}$
6. Indica dónde es continua la función $h(x) = \sqrt{x^2-3}$
7. Determina las asíntotas de la función $y = \frac{\ln x}{x}$
8. Determina las asíntotas de la función $y = (x^2-9)^2$
9. Determina las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$
10. Determina si la función $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ es continua en $x = 2$

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

- 1) Es continua en $x = 1$.
- 2) Es continua en $x = 0$.
- 3) Es continua en $x = 2$.
- 4) Es continua en $[-1, 1]$.
- 5) No es continua en $x = 4$, ya que no está definida, tiene una discontinuidad inevitable.
- 6) No es continua, tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$.

Ejercicio 2

- 1) En $x = 3$
- 2) Sí es.
- 3) $x = 5; y = 0$
- 4) $x = -6; x = 1; y = 0$
- 5) $x = 3; x = -3; y = 4$

Respuestas a los ejercicios propuestos

- 1) $x = -2; x = 2; y = 0$
- 2) No es continua en $t = 2$
- 3) En $\left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- 4) En $x = 0; \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.
- 5) En $x = 2$

Respuestas a la autoevaluación

- 1) No es continua en $x = 1$.
- 2) En todo R .
- 3) En todo R .
- 4) Todo $R - \{-1, 1\}$
- 5) $(-2, +\infty)$
- 6) $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$
- 7) $y = 0$, asíntota horizontal.
- 8) No tiene asíntotas.
- 9) $x = -2$; $y = 0$
- 10) No, porque $f(2)$ no existe.