UNIDAD 1

LÍMITES

Objetivos

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Mostrará la convergencia o divergencia de funciones mediante el criterio de límite de una función en un punto.
- Calculará límites de funciones aplicando los teoremas correspondientes, dependiendo de la función que se trate.
- Identificará cuándo una función tiene límite o no, mediante el análisis de límites laterales.
- Resolverá ejercicios que involucren el límite al infinito de funciones algebraicas, racionales y trascendentes.

Introducción

La idea y el método de los límites de funciones surge en el siglo XIX como una herramienta para acceder al entendimiento del cálculo y análisis matemático, desde entonces es considerado un elemento esencial de la matemática. En esta unidad se presentará el desarrollo de los límites de funciones de la siguiente manera: definición de límite, interpretación geométrica, procedimientos para calcular límites, así como los teoremas involucrados.

Comenzaremos recordando el concepto de función y ofreceremos algunas nociones básicas sobre las funciones, para dar paso al estudio del límite de una función y al cálculo de límites de funciones. En este tema la intuición juega un papel definitivo; así, hemos procurado evitar las formalizaciones rigurosas, pues formalizar lo que muchas veces es claro intuitivamente, no aporta más claridad.

Las funciones están presentes en la vida cotidiana, a saber: el espacio que recorre un móvil *en función del* tiempo, el crecimiento de una planta *en función del* tiempo, el costo de cierto papel *en función de* la cantidad, el aumento o disminución de la temperatura del agua *en función del* tiempo, etcétera.

Concepto de función

Definición. Dados dos conjuntos D e I, se dice que f es una **función** definida en el conjunto D y tomando valores en el conjunto I cuando a cada elemento de D se le asigna uno y sólo un elemento de I, y se representa por $f: D \to I$.

El conjunto D recibe indistintamente los nombres de *conjunto origen*, *conjunto inicial*, *dominio de la función* o *campo de existencia de la función*, y se representa por $Dom\ (f)$.

Un elemento cualquiera del conjunto D se representa por la letra x, y es la *variable independiente*.

Cada elemento x de D tiene por imagen, mediante la función f, un elemento de I que se representa por y y es la *variable dependiente*. Esto se expresa escribiendo $y = f(x)$.

El conjunto I es el *contradominio* o *conjunto final* y los elementos que son imagen de algún elemento de D forman el conjunto imagen ($Im(f)$), *rango de la función* o *recorrido de la función* ($f(D)$):

$$f(D) = \{ f(x) \mid x \in D \}$$

Función real de variable real

Se llama *función real de variable real* a toda función definida en un subconjunto D de los números reales R, tal que a cada elemento x de D le corresponde uno y sólo un elemento y de R: se representa $f: D \to R$ o $x \to f(x) = y$

Representación de una función

La representación gráfica de una función permite visualizar de un modo claro y preciso su comportamiento. Una función f asigna a cada número x del conjunto origen un número $y = f(x)$ del conjunto imagen. Cada par de números $(x, f(x))$ corresponde a un punto del plano, que al ser ubicado en un sistema cartesiano da como resultado la gráfica de la función.

Operaciones con funciones

Suma de funciones. Sean f y g dos funciones reales de variable real definidas en un mismo intervalo, se llama suma de ambas funciones y se representa por $f + g$ a la función definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Resta de funciones. Del mismo modo que se ha definido la suma de funciones, la resta de dos funciones reales de variable real f y g se define como la función: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. Para que esto sea posible es necesario que f y g estén definidas en un mismo intervalo.

Producto de funciones. Sean f y g dos funciones reales de variable real definidas en un mismo intervalo, se llama función producto de f y g a la función definida por:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Cociente de funciones. Dadas dos funciones reales de variable real f y g definidas en un mismo intervalo, se llama función cociente de f y g a la función definida por:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

La función f/g está definida en todos los puntos en que la función g no se anula.

Producto de un número por una función. Dado un número real a y una función f, el producto del número por la función es la función definida por:

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$$

Composición de funciones

Esta operación será de gran utilidad en las siguientes unidades, por lo cual se le dará más importancia.

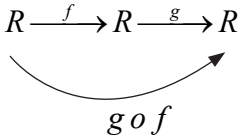
Definición. Dadas dos funciones reales de variable real *f* y *g*, se llama *composición de las funciones f* y *g,* y se escribe $g \circ f$ (*f seguida de g*), a la función definida de *R* en *R*, por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Donde

$f: D(f) \subset R \to R$

$g: D(g) \subset R \to R$

$g \circ f: \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} \subset R \to R$



Funciones simétricas

Funciones pares. Una *función f* es *par* cuando cumple $f(x) = f(-x)$. Es decir, las imágenes de valores de signo contrario coinciden. Por lo que la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje *y*.

Funciones impares. Una *función f* es *impar* si cumple $f(-x) = -f(x)$. A valores opuestos de *x* corresponden imágenes de signo contrario. Por lo que la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Funciones inversas. Dada una *función* $f(x)$, si tiene inversa ésta es otra función designada por $f^{-1}(x)$ de forma que se verifica: $f(a) = b$, si y sólo si $f^{-1}(b) = a$ para toda *a* en el dominio de *f.* Las gráficas de la función y de su inversa son simétricas respecto de la recta $y = x$.

1.1. Concepto de entorno

Antes de estudiar funciones específicas y ejemplos numéricos se establecerá la siguiente definición.

Definición. Sea $x_0 \in R$ y $\varepsilon > 0$. Una **vecindad o entorno** de x_0 es un intervalo de la forma $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$.

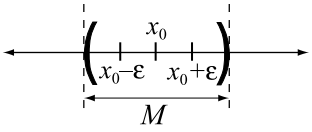


Figura 1.1

1.1.1. Límite de una función en un punto

Idea intuitiva de límite de una función en un punto. El límite de una función $y = f(x)$ en un punto x_0 es el valor al que tiende la función en puntos muy cercanos a x_0.

Con frecuencia surgen situaciones de carácter físico o geométrico que dan lugar a eventos que pueden ser relacionados con el límite de una función determinada. Algunas veces el valor de la función proporciona directamente el límite, en otras el límite se intuye por las condiciones del problema. Asimismo, en varias ocasiones el valor de la función no está definido, pero el límite existe.

Definición. Se dice que una función $f(x)$ tiene como límite a L en el punto x_0, o que su *límite* en x_0 es L y se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, cuando para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Ejemplo 1

Considera la función lineal $y = 2x + 1$, ¿a qué valor se aproxima la función, cuando x se aproxima al valor 3?

Solución

Si se quiere estudiar el límite de esta función cuando x tiende a 3, hay que observar los valores que toma la función en puntos próximos a 3. Para ello se puede elaborar la siguiente tabla de valores:

x	2.5	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999	2.999999
$f(x)$	6	6.8	6.98	6.998	6.9998	6.99998	6.999999

x	3.5	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001	3.000001
$f(x)$	8	7.2	7.02	7.002	7.0002	7.00002	7.000002

Tabla 1.1.

Observa que al tomar valores de x próximos a 3, ya sean mayores o menores, sus imágenes se acercan al valor 7. Cuanto mayor es la proximidad de x a 3, mayor es la proximidad de $f(x)$ a 7.

Esto se expresa así: cuando x tiende a 3, el límite de la función $y = 2x + 1$ es 7, y se escribe de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7$$

Ejemplo 2

Calcula el límite aproximado cuando x tiende a 2 de la función definida por:

$f(x) = x^2, \quad \text{si } x \neq 2$

Solución

Para calcular el límite de la función cuando x tiende a 2, puede elaborarse una tabla de valores para puntos de abscisa próximos a 2:

x	1.5	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999
$f(x)$	2.25	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	3.999996

x	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001
$f(x)$	6.25	4.41	4.0401	4.004001	4.00040001	4.00004	4.000004

Tabla 1.2.

Observa que al tomar valores de x próximos a 2, ya sean mayores o menores, sus imágenes se acercan al valor 4. Cuanto mayor es la proximidad de x a 2, mayor es la proximidad de $f(x)$ a 4, esto es:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

1.1.2. Interpretación geométrica del límite

La interpretación geométrica de una función es de gran utilidad ya que dadas las características de una gráfica se pueden conocer sus elementos; asimismo, conociendo los elementos de una gráfica se puede intuir su ecuación. La definición de límite se puede interpretar como sigue:

Una función $f(x)$ tiene por **límite** L en x_0, si dada una vecindad de L $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ existe una *vecindad* en x_0, $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, tal que para cualquier $x \neq x_0$ en la vecindad de x_0 la imagen $f(x)$ está en la vecindad de L, $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Geométricamente tenemos que:

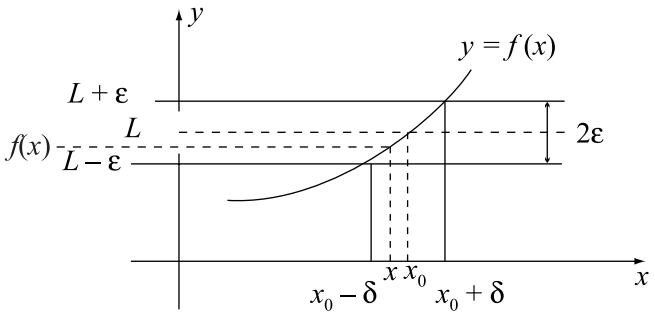


Figura 1.2.

1.2. Teoremas sobre límites

Un hecho fundamental acerca de los límites es que cumplen con ciertos teoremas:

Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, y $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$

Límite de una suma de funciones. El límite de una suma de dos funciones es igual a la suma de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = A+B$$

Límite de una resta de funciones. El límite de una resta de dos funciones es igual a la diferencia de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = A-B$$

Límite de un producto de funciones. El límite de un producto de dos funciones es igual al producto de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x\to x_0} (f\bullet g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \bullet \lim_{x\to x_0} g(x) = A\bullet B$$

Límite de un cociente de funciones. El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de cada una de ellas, si el denominador no es nulo:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}\text{; esto sólo si } B\neq 0$$

Ejemplo 3

Si $f(x)=x^2+2$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\ (f+g)(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\ (f-g)(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\ (f\bullet g)(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

Solución

Se tiene que: $\lim\limits_{x\to 3}\ f(x)=3^2+2=11$; asimismo, $\lim\limits_{x\to 3}\ g(x)=\dfrac{1}{3}$, entonces:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\ (f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 3}\ f(x)+\lim\limits_{x\to 3}\ g(x)=11+\dfrac{1}{3}=\dfrac{34}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\ (f-g)(x)=\lim\limits_{x\to 3}\ f(x)-\lim\limits_{x\to 3}\ g(x)=11-\dfrac{1}{3}=\dfrac{32}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\ (f\bullet g)(x)=\lim\limits_{x\to 3}\ f(x)\bullet\lim\limits_{x\to 3}\ g(x)=11\bullet\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{11}{\frac{1}{3}}=33$

Ejemplo 4

Calcula el límite de $4x^3-3x-2$, cuando x tiende a –1, esto es:

$$\lim_{x\to -1}\ (4x^3-3x-2)$$

Solución

Se tiene que: $\lim_{x\to -1} (4x^3 - 3x - 2) = 4(-1)^3 - 3(-1) - 2 = -4 + 3 - 2 = -3$

Por lo tanto, $\lim_{x\to -1} (4x^3 - 3x - 2) = -3$

1.2.1. Formas determinadas e indeterminadas de límites

Para saber si el límite de una función se puede determinar o no, es necesario el estudio de las funciones racionales, así como el entendimiento de las propiedades que estas funciones cumplen, razón por la cual estudiaremos el cálculo de límites de funciones racionales:

Cálculo de límites de funciones racionales. Una función racional es del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$; donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Ahora bien, se verá cómo obtener el límite de una función racional en un punto x_0.

Puesto que una función racional es el cociente de dos polinomios, para calcular su límite puede aplicarse la regla para el cálculo del límite de un cociente de dos funciones:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)}$$

Tanto el límite del numerador como el del denominador son límites de funciones polinómicas, cuyo cálculo se explicó en el apartado anterior.

Al calcular los límites de las funciones racionales pueden presentarse varias situaciones:

Caso 1. El límite del denominador es distinto de cero: $\lim_{x\to x_0} Q(x) \neq 0$. En este caso, se calculan los límites de $P(x)$ y $Q(x)$ como funciones polinómicas y se realiza su cociente.

Caso 2. El límite del denominador es cero: $\lim_{x\to x_0} Q(x) = 0$. En este caso, el denominador se anula en x_0. Por lo que lo estudiaremos de la siguiente forma.

a) El límite del numerador y denominador es cero:

$\lim_{x\to x_0} Q(x)=0$; $\lim_{x\to x_0} P(x)=0$. En este el resultado es $\frac{0}{0}$, **indeterminado.**

Para resolver esto basta con tener en cuenta que si $Q(x_0) = 0$ y $P(x_0) = 0$, x_0 es raíz de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, entonces el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede simplificar antes de calcular los límites.

b) El límite del numerador es diferente de cero y el denominador es cero:

$\lim_{x\to x_0} Q(x)=0$; $\lim_{x\to x_0} P(x)\neq 0$; entonces: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{0}$.

Para resolver esta indeterminación será necesario estudiar el apartado 1.2.2 referente a los límites laterales de una función

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ en el punto } x_0$$

Si ambos límites laterales son iguales, la función tiene por límite su valor. Si no son iguales, la función no tiene límite.

Ejemplo 5

Calcula el límite de la función $f(x)=\frac{3x^2-4x}{x}$, cuando $x\to 0$.

Solución

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-4x}{x}=\frac{\lim_{x\to 0}(3x^2-4x)}{\lim_{x\to 0} x}=\frac{0}{0}$, indeterminado por lo que se simplifican numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-4)}{x}=\lim_{x\to 0}(3x-4)=-4.$$

Ejemplo 6

Calcula el límite de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{2x^3-1}{3x^2+4}$, cuando x tiende a 1.

b) $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10}$, cuando x tiende a 2.

Solución

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 - 1}{3x^2 + 4} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^3 - 1)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 + 4)} = \dfrac{1}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} =$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 2x^2 - 6x + 12)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2 + 3x - 10)} = \frac{2^3 - 2(2)^2 - 6(2) + 12}{2^2 + 3(2) - 10} = \frac{0}{0}$$

Esta indeterminación se resuelve simplificando el cociente, para lo cual se obtiene la factorización de los polinomios

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 12$ y $Q(x) = x^2 + 3x - 10$; esto es:

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 12 = (x-2)(x^2-6)$;

asimismo,

$Q(x) = x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$,

entonces, el límite del cociente $P(x)/Q(x)$ es:

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-6)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-6)}{(x+5)} = \frac{-2}{7}$$

1.2.2. Límites laterales

Ahora examinaremos la condición para que el límite exista, con base en los límites laterales de una función.

El límite por la **izquierda** de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a x_0, es el valor al que tiende la función para puntos próximos menores que x_0. Para expresar el límite por la izquierda se escribe: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

El límite por la **derecha** de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a x_0, es el valor al que tiende la función para puntos próximos mayores que x_0. Para expresar el límite por la derecha se escribe: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

La relación entre el límite y los límites laterales de una función es:

El límite de una función $y = f(x)$ existe en un punto x_0 si y sólo si existen los límites laterales, izquierda y derecha, y además **son iguales**, esto es:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, si y sólo si: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Ejemplo 7

Calcula los límites laterales de las siguientes funciones cuando $x_0 = 0$

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $g(x) = -\frac{1}{x^2}$

Solución

a) Para calcular el límite de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, hay que estudiar los valores que toman las imágenes de puntos próximos a 0. De lo que se deduce que: para valores próximos y menores que 0, la función toma valores cada vez mayores. Lo que significa que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Asimismo, para valores próximos mayores que 0, la función toma valores cada vez mayores. Lo que significa que:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

b) Para la función $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, el límite de esta función en el punto $x_0 = 0$ es $-\infty$ ya que para valores próximos a 0 y distintos de 0, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores que toma la función son cada vez menores.

Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$

Ejemplo 8

Calcula el límite de la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, cuando $x\to 1$.

Solución

Se tiene que: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\ \dfrac{1}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(1)}{\lim\limits_{x\to 1}\ (x-1)}=\dfrac{1}{0}$; indeterminado por lo que se analizan los límites laterales.

Para valores próximos mayores que 1, la función toma valores cada vez más grandes. Lo que significa:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\ \frac{1}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(1)}{\lim\limits_{x\to 1^+}\ (x-1)}=+\infty$$

Para valores próximos menores que 1, la función toma valores cada vez más chicos. Lo que significa:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\ \frac{1}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(1)}{\lim\limits_{x\to 1^-}\ (x-1)}=-\infty$$

Como los límites laterales no coinciden, la función $f(x) = 1/(x - 1)$ no tiene límite cuando x tiende a 1.

Ejemplo 9

¿A qué valor se aproxima la función $f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x<3\\ x-2, & \text{si } x>3\end{cases}$ definida en R cuando x se aproxima a 3?

Solución

Cuando x se aproxima a 3, tanto por la izquierda como por la derecha, la función $f(x)$ se aproxima al valor de uno. Por lo tanto, se intuye que:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=1$$

Ejercicio 1

1. Calcula el $\lim_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{2-x}$

2. Calcula el $\lim_{x\to 5}\dfrac{3}{x^2+2}$

3. Calcula el $\lim_{h\to 0}\dfrac{h^3+8}{h+2}$

4. Calcula el $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(4x^2-8x+5)$

5. Calcula el $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{2+t}-\sqrt{2}}{t}$

1.3. Límite de una función cuando la variable independiente tiende a infinito

Ahora examinaremos los límites infinitos de funciones y daremos un criterio para el cálculo del límite de funciones polinómicas, utilizando las propiedades definidas con anterioridad.

Límites infinitos de funciones. Para observar el límite de una función cuando la variable independiente tiende a ±∞, se estudiarán los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L$; b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

Límites de funciones polinómicas. Una función polinómica es una función del tipo: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. El límite de una función polinómica en el infinito es +∞ o –∞, dependiendo de que el coeficiente del término de mayor grado del polinomio sea positivo o negativo, esto es:

$\lim_{x\to\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=+\infty$; si $a_n>0$

$\lim_{x\to\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=-\infty$; si $a_n<0$

Ejemplo 10

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x+5)$

Solución

a) Dando valores cada vez más grandes a la variable independiente de la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, se observa que a medida que x toma valores cada vez mayores, la función se aproxima más a 1. Por lo tanto, el límite de la función cuando $x \to +\infty$ es 1, lo que se escribe como:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Ahora bien, a medida que x toma valores cada vez menores, la función se aproxima más a 1. Por lo tanto, el límite de la función cuando $x \to -\infty$ es también 1.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

b) De la función $f(x) = x + 5$, se ve claramente que cuando $x \to +\infty$, la función $f(x) \to +\infty$. Es decir, a valores cada vez mayores de x, corresponden valores cada vez mayores de la función. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+5) = +\infty$$

Asimismo, cuando x toma valores cada vez menores, la función también toma valores cada vez menores. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+5) = -\infty$$

Entonces, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x+5) = \pm\infty$

Ejemplo 11

Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to\infty} (-4x^5 + x^2 + 3)$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x - 6\right)$

Solución

a) Para $(-4x^5 + x^2 + 3)$ el coeficiente del término de mayor grado es –4, entonces: $\lim_{x\to\infty} (-4x^5 + x^2 + 3) = -\infty$

b) Para $\left(\frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x - 6\right)$, el coeficiente del término de mayor grado 8/3 es positivo, entonces: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x - 6\right) = +\infty$

1.3.1. Límites de funciones racionales cuando la variable tiende a infinito

En este apartado abordaremos otro caso particular de la obtención de límites de funciones donde la variable tiende a ∞, utilizando para esto las mismas reglas que en el caso anterior.

Límite de una función racional. El límite de una función racional cuando $x\to+\infty$, es igual al límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \text{ y } Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m .$$

Entonces: $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$

El valor de este límite depende del valor que tengan *n* y *m*:

- Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador ($n > m$), el límite es $+\infty$ si $\frac{a_n}{b_m} > 0$ o $-\infty$ si $\frac{a_n}{b_m} < 0$

• Si el grado del numerador es igual que el grado del denominador ($n = m$), el límite es el cociente a_n / b_m.
• Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador ($n < m$), el límite es 0.

Ejemplo 12

Calcula el límite de las funciones siguientes cuando $x \to \infty$:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3 - 5}{-x^2 - 4}$

Solución

a) En este caso, el grado del numerador, 2, es mayor que el grado del denominador, 1, por lo tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{1} = +\infty$$

b) El grado del numerador es mayor que el grado del denominador y los términos de mayor grado tienen signos distintos, por lo tanto:

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{-1} = -\infty$$

Ejemplo 13

Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3}$

Solución

a) El grado del numerador es igual que el grado del denominador, por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2-2x+5}{4x^2-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{4x^2} = \frac{-3}{4}$$

b) El grado del numerador es menor que el grado del denominador, por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^3-4x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

1.4. Límites de funciones trascendentes cuando x tiende a cero

En este apartado analizaremos las funciones trascendentes cuya variable tiende a cero, para esto, iniciamos con la siguiente propiedad.

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $f(x) \leq g(x)$, entonces

$\lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} g(x)$ o $\lim_{x\to x_o} f(x) \leq \lim_{x\to x_o} g(x)$ si estos límites existen.

Ahora bien, si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} h(x)$, entonces, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$

Ejemplo 14

Muestra que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Solución

De acuerdo con la figura 1.3, si $OP = 1$ y el ángulo $x > 0$, se tiene que $OQ = \cos x$, $PQ = \operatorname{sen} x$, $PR = x$, además se observa que: $\operatorname{sen} x < x$, como $x > 0$, entonces, $|\operatorname{sen} x| < |x|$.

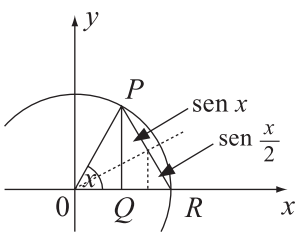


Figura 1.3

Por las propiedades anteriores tenemos que $\lim_{x\to 0}(-x) \le \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \le \lim_{x\to 0} x$ por lo que se puede concluir que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \le \lim_{x\to 0} x = 0$

donde $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$

Ejemplo 15

Utilizando la figura del problema anterior, muestra que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$

Solución

En efecto $\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right| < |\operatorname{sen} x|$ y dado que $\lim_{x\to 0}(-\operatorname{sen} x) \le \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \le \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x$, tenemos $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \le \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

1.4.1. El número *e*

Definición. Se denomina número e al límite de la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, cuando $n \to \infty$, lo que se escribe como $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Su valor con diez cifras decimales es:

$e =$ 2.7182818284

Donde, por el criterio de convergencia, el número e satisface la desigualdad $2 \le e \le 3$, es irracional y se puede calcular con la precisión que se requiera.

Ejemplo 16

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

Solución

a) El $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\bullet\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=e\bullet 1=e.$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=e$

b) El $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, luego entonces

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\bullet\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\bullet\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\bullet e\bullet e=e.$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=e^{3}.$

Ejercicio 2

1. Calcula el $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}$.

2. Calcula el $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}+1}{2x^{2}+3}$.

3. Calcula el $\lim_{x\to\infty}(x^{2}-100)$.

4. Calcula el $\lim_{x\to\infty}\frac{100x^{2}+400x-7}{x^{3}-4x^{2}+7x-11}$.

5. Calcula el $\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\csc x}{\cos 2x}$.

Ejercicios resueltos

En cada uno de los siguientes ejercicios determina el límite de la función cuando su variable tiende al valor que se indica:

1. $\lim_{x\to 3}(2x^2+1)$

Solución

Sustituyendo el valor de la variable en la función directamente se tiene: $\lim_{x\to 3}(2x^2+1)=2(3)^2+1=2(9)+1=18+1=19$, que es el límite al que tiende la función cuando *x* tiende a 3.

2. $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x-5}{x^2+1}$

Solución

Sustituyendo el valor de la variable en la función directamente se tiene $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x-5}{x^2+1}=\dfrac{3(2)-5}{(2)^2+1}=\dfrac{6-5}{4+1}=\dfrac{1}{5}$, que es el valor del límite.

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

Solución

Observa que esta función no está definida cuando $x = 1$, porque cuando *x* es 1 el numerador y el denominador son 0. No obstante, puedes preguntar: ¿cómo se comporta $f(x)$ cuando *x* está cerca de 1 pero *no* es 1?

Ahora bien, considerando la identidad algebraica $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$, entonces, $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=(1)^2+1+1=3$, por lo tanto, el límite de la función es 3.

4. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2}{1-x^2}$

Solución

Sustituyendo el valor al que tiende x en la función resulta

$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{1-x^2}=\frac{(3)^3-3(3)^2}{1-(3)^2}=\frac{27-27}{1-9}=\frac{0}{-8}=0$, donde el límite de la función es 0.

5. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{x^2+2x}$

Solución

Sustituyendo el valor al que tiende x en la función, se obtiene:

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{x^2+2x}=\frac{(2)^2+2+1}{(2)^2+2(2)}=\frac{4+2+1}{4+4}=\frac{7}{8}$, que es valor al que tiende el límite en la función dada.

6. $\lim_{x\to a}(x^2-ax)$

Solución

Sustituyendo el valor al que tiende x en la función resulta:

$\lim_{x\to a}(x^2-ax)=a^2-a(a)=a^2-a^2=0$, que es el valor del límite de la función.

7. $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x}{x}$

Solución

Nota que esta función no está definida cuando $x = 0$, porque cuando x es 0, el numerador y el denominador son 0. No obstante, tenemos todo el derecho de preguntar: ¿cómo se comporta $f(x)$ cuando x está cerca de 0 pero *no* es 0?

Factorizando el numerador se obtiene $x(3x-1)$; luego, sustituyendo:

$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}(3x-1)=3(0)-1=0-1=-1$, que es el valor del límite de la función cuando x tiende a cero.

8. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}$

Solución

Sustituyendo el valor al que tiende θ en la función se obtiene:

$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}=\frac{\operatorname{sen}(0)}{\tan(0)}=\frac{0}{0}$, como se observa, al sustituir directamente el valor al que tiende el ángulo la función se indefine al quedar un cociente de cero entre cero, por lo que mediante identidades trigonométricas se intentará encontrar el límite de la función si es que tiene.

De la trigonometría elemental se tiene que $\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, entonces, sustituyendo en la expresión original se tiene

$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{1}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=\cos(0)=1$, que es el valor del límite de la función.

9. $\lim_{x\to -1}(x^3)$

Solución

Sustituyendo el valor al que tiende x en la función resulta:

$\lim_{x\to -1}(x^3)=(-1)^3=-1$, que es el valor del límite de la función.

10. $\lim_{x\to +2}\frac{x^2}{x+2}$

Solución

Sustituyendo el valor al que tiende x en la función, resulta:

$\lim_{x\to +2}\frac{x^2}{x+2}=\frac{(2)^2}{2+2}=\frac{4}{4}=1$, que es el límite de la función.

11. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

Solución

Nota que esta función no está definida cuando x =–1, porque cuando x es –1, el numerador y el denominador son 0. No obstante, podemos preguntar: ¿cómo se comporta $f(x)$ cuando x está cerca de –1 pero *no* es –1?

Del álgebra se tiene la siguiente identidad: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, sustituyendo en la expresión dada se obtiene:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=(-1)^2-(-1)+1=1+1+1=3\ ,$$

que es el valor del límite de la función.

12. Encuentra los límites laterales en $x = 0$ de la función $f(x)=\dfrac{x+x^2}{|x|}$, $(x\neq 0)$.

Solución

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x^2}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}1+\lim_{x\to 0^+}x=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+x^2}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)+\lim_{x\to 0^-}(-x)=-1$$

que son los límites de la función por la derecha y por la izquierda.

13. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{7}{x}$

Solución

Como $\dfrac{7}{x}=7\left(\dfrac{1}{x}\right)$, cuando x toma valores muy grandes, $\dfrac{1}{x}$ toma valores cada vez más pequeños, por lo que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{7}{x}=7\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=7(0)=0$

En los siguientes ejercicios para calcular los límites haremos uso del resultado enunciado en la sección 1.3.1.

14. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x}$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

15. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+3x-1}$

Solución

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+3x-1}=\dfrac{2}{1}=2$, límite de la función dada.

16. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2-1}{6x^3+5x+2}$

Solución

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2-1}{6x^3+5x+2}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$, que es el valor del límite de la función.

17. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+1}{x+3}$

Solución

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+1}{x+3}=\infty$

18. Si $f(x)=\begin{cases}x+2 & x<3\\ 3x-1 & x>3\end{cases}$

$\lim_{x\to3^+}f(x)$

Solución

$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}(3x-1)=3(3)-1=9-1=8$

19. Si $f(x)=\begin{cases}x+2 & x<3\\ 3x-1 & x>3\end{cases}$

$\lim_{x\to3^-}f(x)$

Solución

$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}x+2=3+2=5$

Ejercicios propuestos

1. Calcula el $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

2. Calcula el $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

3. Calcula el $\lim_{x\to 0}\dfrac{3\cos 2x}{\operatorname{ctg} 2x}$

4. Calcula el $\lim_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

5. Calcula el $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$

Autoevaluación

1. Calcula el $\lim_{x\to -16} \frac{x+8}{x-1}$ y selecciona la opción correcta:

a) $\frac{8}{17}$

b) $-\frac{8}{17}$

c) $-\frac{8}{15}$

d) $\frac{1}{2}$

2. Calcula el $\lim_{x\to \pi}(x^3+\operatorname{sen} x+8)$ y selecciona la opción correcta:

a) π^2+8
b) π^3+8
c) π^4+8
d) π^5+8

3. Calcula el $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^3}{x^5-2}$ y selecciona la opción correcta:

a) -6
b) -4
c) -2
d) 2

4. Calcula el $\lim_{x\to -9} \frac{x^2-81}{x+9}$ y selecciona la opción correcta:

a) 18
b) 14
c) 0
d) -18

5. Calcula el $\lim_{x\to -\infty}(12x^3-20x+3)$ y selecciona la opción correcta:

a) Ninguna es correcta
b) 0
c) ∞
d) $-\infty$

6. Calcula el $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{-x^2+5x-7}$ y selecciona la opción correcta:

a) –27
b) –3
c) 3
d) 27

7. Calcula el $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ y selecciona la opción correcta:

a) 1
b) 0
c) –1
d) – 0.5

8. Calcula el $\lim_{x\to 0^-}\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$ y selecciona la opción correcta:

a) –2
b) –1
c) 0
d) 1

9. Calcula el $\lim_{x\to-\infty}(x^4+1)(x^2-7)$ y selecciona la opción correcta:

a) $-\infty$
b) 0
c) $+\infty$
d) Ninguna es correcta.

10. Calcula el $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ y selecciona la opción correcta:

a) $-\infty$
b) 0
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{4}$

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

1) $L = 4$

2) $L = \frac{1}{9}$

3) $L = 4$

4) $L = 2$

5) $L = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Ejercicio 2

1) $L = 0$

2) $L = \frac{1}{2}$

3) $L = +\infty$

4) $L = 0$

5) $L = \infty$

Respuestas a los ejercicios propuestos

1) $L = 2x$

2) $L = 1$

3) $L = 0$

4) $L = \frac{1}{10}$

5) $L = 0$

Respuestas a la autoevaluación

1) $L = \dfrac{8}{17}$

2) $L = \pi^3 + 8$

3) $L = -2$

4) $L = -18$

5) $L = -\infty$

6) $L = -3$

7) $L = 1$

8) $L = -1$

9) $L = -\infty$

10) $L = \dfrac{1}{4}$