UNIDAD 4

Derivadas II

Objetivos

Al terminar la unidad, el alumno:

- Aplicará la regla de la cadena para calcular derivadas.
- Calculará la derivada de las funciones exponencial y logarítmica.
- Utilizará la función logarítmica para simplificar la obtención de las derivadas de ciertas funciones.
- Calculará la segunda y la tercera derivada de funciones.

Introducción

Cuando se calcula la derivada de una función, en todos los puntos donde es derivable, se tiene como resultado otra función. Si se deriva esta nueva función se obtiene la segunda derivada de la función original. Al continuar el proceso derivando los resultados obtenidos de la derivación previa se obtiene la tercera, cuarta y, en general, la *n*-ésima derivada de la función original. De igual manera que la primera derivada proporciona información del comportamiento de la función, la segunda derivada tiene su utilidad no solamente en la interpretación gráfica de la función, sino que su interpretación es *la razón de cambio de la razón de cambio* que se aplica a problemas de administración y economía.

En esta unidad también se revisarán las técnicas de derivación desarrollando la regla de la cadena para funciones compuestas y las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica. A su vez, aprovechando las propiedades de simplificación que tiene el logaritmo se desarrollará una técnica para facilitar la obtención de la derivada de ciertas funciones.

4.1. La regla de la cadena

Existen situaciones en la práctica en las que una cantidad es función de una variable, la cual a su vez es función de una segunda variable y se requiere calcular la derivada de la primera función respecto a la segunda variable. En otras palabras, esta situación hace referencia a la derivada de una función que es el resultado de la composición de otras dos funciones.

Observemos el siguiente caso: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Esta función no corresponde a ninguno de los casos de derivación ya estudiados, ya que es el resultado de realizar la composición de dos funciones conocidas $g(x) = x^2 - 1,\ h(x) = \sqrt{x}$. Esto es:

$$\begin{aligned} f(x) &= (h \circ g)(x) \\ &= h(g(x)) \\ &= h(x^2 - 1) \\ &= \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Para calcular la derivada de la composición de funciones se tiene la llamada *regla de la cadena,* que se presenta a continuación:

Regla de la cadena. Si las funciones g y h son derivables, la función compuesta $f = (h \circ g)$ también lo es, y su derivada en cualquier valor x está dada por la expresión:

$$f'(x) = h'[g(x)] \cdot g'(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Con palabras se dice que la derivada de la composición de dos funciones *es el producto de las derivadas de las funciones*, sin olvidar que la derivada de la última función (la última que se calcula) se determina en el valor de la primera función. También se dice que la derivada de una función compuesta *es la derivada de la función por la derivada interna*.

Ejemplo 1

¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$?

Solución: se tiene que $f(x) = h(g(x))$ donde $g(x) = x^2 - 1$ y $h(x) = \sqrt{x}$. Como $g'(x) = 2x$ y $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, al aplicar la regla de la cadena obtenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x^2 - 1) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Si en la función compuesta $y = f(x) = h(g(x))$ definimos $u = g(x)$, tenemos que $y = f(u)$ y la regla de la cadena se puede expresar de la siguiente forma usando la notación de Leibniz para la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(2)}$$

Ejemplo 2

Usando la expresión $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ para la regla de la cadena, ¿cuál es la derivada de la función $y = (x^2 + x)^{77}$?

Solución: al llamar $u = x^2 + x$ la función se reduce a la forma $y = u^{77}$ y podemos calcular las derivadas en forma directa:

$$\frac{dy}{du} = 77u^{76} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2x + 1$$

Se utiliza la regla de la cadena $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ para calcular la derivada solicitada, se sustituyen los resultados obtenidos y se tiene:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 77u^{76}(2x + 1)$$

Se sustituye el valor de u en función de x:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 77(x^2 + x)^{76}(2x + 1)$$

Ejemplo 3

¿Cuál es la derivada de la función $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$?

Solución: escribiendo la función en la forma $y = (1 + x^3)^{1/3}$ se calcula la derivada tomando en cuenta que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

Donde: $y = u^{1/3}$
$u = 1 + x^3$

Así tenemos que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}u^{-2/3}(3x^2)$

Por lo tanto $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(1 + x^3)^{-2/3}(3x^2)$

$= x^2(1 + x^3)^{-2/3}$

La regla de la cadena para potencias

El ejemplo anterior es una situación particular, muy usual en la práctica, de la composición de dos funciones, donde la última es una función potencia.

Se trata de una función de la forma $y = [g(x)]^n$ donde $g(x)$ es una función cualquiera y n es un número real. Su derivada está dada por la expresión:

$$y' = \frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Ejemplo 4

¿Cuál es la derivada de la función $R(x) = (3x-2)^{10}(5x^2 + x - 1)^{15}$?

Solución: lo primero que se observa es que se trata de la derivada del producto de dos funciones:

$$f(x) = (3x-2)^{10} \quad \text{y} \quad g(x) = (5x^2 + x - 1)^{15}$$

Pero antes de aplicar la regla para un producto es necesario calcular las derivadas de estas funciones aplicando la expresión **(3)** a cada una de ellas:

$$f'(x) = 10(3x-2)^9 \cdot 3 = 30(3x-2)^9$$

$$g'(x) = 15(5x^2 + x - 1)^{14} \cdot (10x + 1)$$

Recordemos que la regla de un producto es $(fg)' = fg' + gf'$ para aplicarla a la función R:

$R'(x) = (3x-2)^{10}15(5x^2 + x - 1)^{14}(10x + 1) + (5x^2 + x - 1)^{15}30(3x-2)^9$
Factorizando la expresión tenemos:
$R'(x) = 15(3x-2)^9(5x^2 + x - 1)^{14}[2(5x^2 + x - 1) + (3x-2)(10x + 1)]$
$R'(x) = 15(3x-2)^9(5x^2 + x - 1)^{14}(10x^2 + 2x - 2 + 30x^2 + 3x - 20x - 2)$
$R'(x) = 15(3x-2)^9(5x^2 + x - 1)^{14}(40x^2 - 15x - 4)$

Ejemplo 5

En cierta empresa el costo total de fabricación de u artículos durante el horario de producción diario está dado por la expresión $C(u) = 3u^2 + u + 9$ pesos. Si al mediodía ya se han producido 40 artículos y durante la tarde se fabrican artículos adicionales a un promedio de 10 artículos por hora. La expresión $u(t) = 40 + 10t$ indica el número de artículos que se producen en t horas de trabajo después del mediodía. ¿Cuál es la razón a la que cambia el costo total de fabricación con respecto al tiempo una hora después del mediodía?

Solución: el propósito es determinar la derivada de la función costo total $C(u)= 3u^2 + u + 9$ con respecto al tiempo, esto es:

$$\frac{dC}{dt} \text{ cuando el tiempo es } t = 1$$

Al utilizar la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{du}\frac{du}{dt}$$

Lo que debemos hacer es calcular la derivada de la función costo total con respecto a la cantidad u y la derivada de la función costo con respecto al tiempo t, esto es:

$$\frac{dC}{du} = \frac{d}{du}(3u^2 + u + 9) = 6u + 1 \text{ y } \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(40 + 10t) = 10$$

Reemplazando los resultados obtenidos en $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{du}\frac{du}{dt}$ se tiene:

$$\frac{dC}{dt} = (6u + 1)(10) = 60u + 10$$

Como $u=40+10t$ se obtiene que:

$$\frac{dC}{dt} = 60(40 + 10t) + 10$$

$$\frac{dC}{dt} = 2\ 400 + 600t + 10$$

$$\frac{dC}{dt} = 2\ 410 + 600t$$

Ahora se calcula $\frac{dC}{dt}$ para $t = 1$ y tenemos:

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t=1} = 3\ 010$$

Por tanto, la razón a la cual cambia el costo total de fabricación con respecto al tiempo, una hora después del mediodía, es de $3 010 por hora.

Ejercicio 1

Obtén la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = (x^2 + 4x + 6)^5$

2. $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$

3. $f(t) = \dfrac{1}{(t^2 - 2t - 5)^4}$

4. $g(t) = (6t^2 + 5)^3 (t^3 - 7)^4$

5. $F(s) = \sqrt{s^3 + 1}(s^2 - 1)^4$

6. $F(y) = \left(\dfrac{y+6}{y-9} \right)^4$

7. Una organización no gubernamental de protección del ambiente, que realiza estudios en diferentes poblaciones, ha estimado que el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire es $c(p) = \sqrt{0.4p^2 + 15}$ partes por millón cuando el número de habitantes en cada zona sea p-miles. Los estudios permiten estimar que los habitantes en miles en el momento t años será $p(t) = 3.1 + 0.1t^2$ miles. ¿A qué tasa cambiará el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de 5 años si las condiciones ambientales no cambian?

8. En una industria el costo total de fabricación de q unidades producidas en una jornada diaria es $C(q) = 0.4q^2 + q + 800$ pesos. Con base en un estudio se determinó que el nivel de producción está dado por $q(t) = t^2 + 130t$ unidades que se producen durante las primeras t horas de una jornada de producción. Calcula la razón a la cual cambia el costo total de fabricación con respecto al tiempo una hora después de iniciada la producción.

4.2. Derivadas logarítmicas y exponenciales

Las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica no se pueden obtener por ninguna de las reglas expuestas hasta el momento; usaremos la definición para obtenerlas.

Si $y = e^x$, entonces $y' = \dfrac{dy}{dx} = e^x$ **(4)**

la derivada de la función exponencial con base e(e=2.7182) es igual a la función misma, calculando de acuerdo con la definición:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \quad \text{como } e^{x+\Delta x} = e^x e^{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

La siguiente tabla nos permite ver que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$:

Δx	-0.001	-0.0001	-0.00001	0	0.00001	0.0001	0.001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	.999500	.999950	.999995		1.000005	1.00005	1.0005

entonces:

$$y' = e^x \bullet 1$$
$$y' = e^x$$

Ejemplo 6

¿Cuál es la derivada de la función $y = e^{x^2}$?

Solución: la función dada es la composición de la función exponencial con la función $f(x) = x^2$ por lo tanto su derivada la obtenemos usando la expresión $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ que es la regla de la cadena:

Sea $u = x^2$, $y = e^u$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u(2x)$. Al reemplazar u por su valor en x, obtenemos $\frac{dy}{dx} = y' = 2xe^{x^2}$

Entonces tenemos que *la derivada de una exponencial con un exponente que a su vez es una función, es igual a la misma exponencial multiplicada por la derivada del exponente.*

Simbólicamente tenemos:

Si $y = e^{g(x)}$ entonces $y' = e^{g(x)}\, g'(x)$ **(5)**

Ejemplo 7

¿Cuál es la derivada de la función $y = e^{\sqrt{x}}$?

Solución: al aplicar la expresión **(5)** obtenemos:

$$y' = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 8

¿Cuál es la derivada de $y = e^{\frac{1}{x}}$?

Solución: al aplicar la expresión **(5)** obtenemos:

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Para la función logarítmica se tiene:

$$\text{Si } y = \ln x \text{ entonces } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \textbf{(6)}$$

Para $x > 0$, si $y = \ln x$ significa que $e^y = x$ derivando esta última expresión con respecto a x, resulta:

$$\frac{de^y}{dx} = \frac{dx}{dx}$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} \qquad \text{como} \quad e^y = x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 9

Si $y = \ln x^3$ determinemos la derivada, es decir, y'.

Solución: se trata de calcular la derivada de una función compuesta. Aplicando la regla de la cadena tenemos que si $y = \ln u$ y $u = x^3$ entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}3x^2$ y al sustituir u obtenemos $y' = \frac{du}{dx} = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$.

El ejemplo anterior es un caso particular de una situación más general que podemos expresar de la siguiente forma:

$$\text{Si } y = \ln f(x) \text{ entonces } y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \textbf{(7)}$$

Ejemplo 10

¿Cuál es la derivada de la función $y = \ln\left(\frac{2x+3}{3x-1}\right)$?

Solución: por la expresión **(7)** se tiene que:

$$y' = \frac{1}{\frac{2x+3}{3x-1}} \cdot \frac{(3x-1)2-(2x+3)3}{(3x-1)^2} = -\frac{11}{(2x+3)(3x-1)}$$

Para calcular la derivada de ciertas funciones que en principio se complican, se hace uso de las propiedades de los logaritmos:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

Ejemplo 11

¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = (x^3 - 2)(x^2 - 3)(8x - 5)$?

Solución: Calculamos el logaritmo natural de ambos lados en la función dada:

$$\ln f(x) = \ln \left[(x^3-2)(x^2-3)(8x-5)\right]$$

$$\ln f(x) = \ln(x^3-2) + \ln(x^2-3) + \ln(8x-5)$$

Calculamos ahora la derivada en ambos lados utilizando **(7)**

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{2x}{x^2-3} + \frac{8}{8x-5}$$

Despejamos la derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{2x}{x^2-3} + \frac{8}{8x-5}\right) \cdot f(x) \quad \text{por lo que:}$$

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{2x}{x^2-3} + \frac{8}{8x-5}\right) (x^3-2)(x^2-3)(8x-5)$$

A este proceso se le denomina **derivación logarítmica**.

Ya se ha hecho referencia a la función exponencial de la forma e^x donde e es un número real positivo. Ahora, si a es un real positivo, se generaliza la función exponencial definiéndola de la siguiente manera:

Si $a > 0$, se define la función exponencial de base a como $a^x = e^{x \ln a}$ para cualquier número real x. **(8)**

Es así que $2^{\sqrt{2}}$ es igual a $e^{\sqrt{2}\ln 2} = e^{1.41 \ln 2} = e^{(1.41)(0.69)} = e^{0.98} = 2.7182^{0.98} = 2.66$

La función exponencial general se diferencia de la exponencial natural por la constante que aparece multiplicando el exponente del número e, que corresponde al ln de la base a.

A continuación se presenta un análisis de la función exponencial general que comprende su gráfica, sus límites especiales al infinito y su derivada.

- Las gráficas de la función exponencial a^x cuando a toma los valores 2 y 3 se dan en las figuras 4.1 y 4.2. En todos los casos la gráfica de la función exponencial toma la misma forma, la diferencia está dada por la magnitud del valor de a.

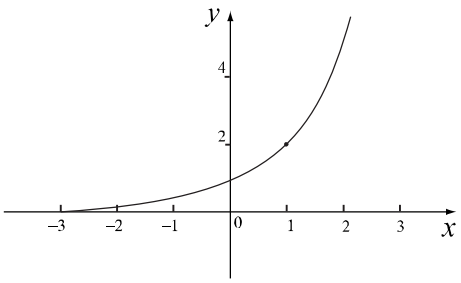

Figura 4.1. Gráfica de la función $y = 2^x$.

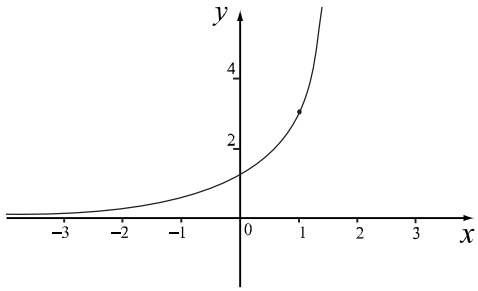

Figura 4.2. Gráfica de la función $y = 3^x$.

- La definición **(8)** y las figuras 4.1 y 4.2 ponen en evidencia que los límites de las funciones exponenciales de base *a*, cuando *x* tiende al infinito, son los mismos que los de la función exponencial. Es decir:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

- La derivada se obtiene aplicando la regla de la cadena a la expresión **(8)**:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \qquad \textbf{(9)}$$

En general

$$\frac{da^v}{dx} = a^v \ln a \frac{dv}{dx} \qquad \textbf{(10)}$$

Ejemplo 12

$$y = \frac{x^3\sqrt{2+x}}{3x-1}$$

Solución: Calculamos el logaritmo natural de ambos lados en la función dada y simplificamos:

$$\ln y = \ln\left[\frac{x^3\sqrt{2+x}}{3x-1}\right] = \ln(x^3\sqrt{2+x}) - \ln(3x-1)$$

$$= \ln x^3 + \ln(\sqrt{2+x}) - \ln(3x-1)$$

$$\ln y = 3\ln x + \frac{1}{2}\ln(2+x) - \ln(3x-1)$$

Calculamos la derivada en ambos lados de la función utilizando **(7)**

$$\frac{1}{y}y' = 3\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{2+x} - \frac{1}{3x-1}(3)$$

Despejamos la derivada y' y sustituimos el valor de y:

$$y' = \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2(2+x)} - \frac{3}{3x-1}\right)\frac{x^3\sqrt{2+x}}{3x-1}$$

Ejemplo 13

¿Cuál es la derivada de la función $y = 5^{x^2}$?

Solución: aplicamos la regla de la cadena y la expresión **(10)**:

$$y' = 5^{x^2} \ln 5 \cdot 2x = 2x\,(5^{x^2}) \ln 5$$

Ahora bien, la inversa de la función exponencial de base a es la función logarítmica de base a, y se define de la siguiente forma:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \qquad \textbf{(11)}$$

Para saber cómo se calcula este nuevo logaritmo, hay que tomar en cuenta que:

$a^y = x$, implica por **(8)** que $e^{y \ln a} = x$.

Al calcular el ln en ambos lados de la última expresión se obtiene que $y \ln a = \ln x$.

Al despejar y se tiene $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, que al sustituir en el lado izquierdo de la equivalencia **(11)** permite obtener:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \textbf{(12)}$$

En las figuras 4.3 y 4.4 aparecen las gráficas de las funciones logarítmica para las bases 2 y 3.

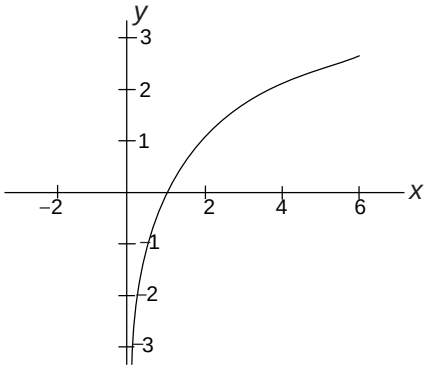

Figura 4.3. Gráfica de la función $y = \log_2 x$

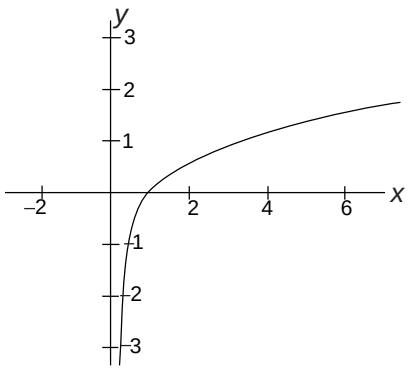

Figura 4.4. Gráfica de la función $y = \log_3 x$

De esta forma es fácil calcular funciones logarítmicas en cualquier base gracias a la expresión **(12)**: basta calcular el logaritmo natural del número dado y dividir por el logaritmo natural de la base. Por ejemplo, $\log_7 150 = \frac{\ln 150}{\ln 7} = \frac{5.01}{1.95} = 2.57$

Para calcular la derivada de la función $y = \log_a x$, basta derivar la expresión **(12)** para obtener:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textbf{(13)}$$

Similarmente a **(7)** se tiene la siguiente derivada:

$$\frac{d}{dx}(\log_a f(x)) = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \qquad \textbf{(14)}$$

Ejemplo 14

¿Cuál es la derivada de la función $y = \log_3(x^2 + x + 9)$?

Solución: aplicamos la expresión **(14)** para obtener la derivada:

$$y' = \frac{1}{\ln 3}\left[\frac{2x+1}{x^2+x+9}\right]$$

Ejemplo 15

¿Cuál es la derivada de la función $y = \log_5(e^{2x^3+3x^2})$?

Solución: aplicamos directamente las expresiones **(14)** y **(5)** para obtener:

$$y' = \frac{1}{\ln 5}\left(\frac{(e^{2x^3+3x^2})(6x^2+6x)}{e^{2x^3+3x^2}}\right) = \frac{6x^2+6x}{\ln 5}$$

Ejercicio 2

Determina la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

2. $y = \log_6(x^3 + x)$

3. $y = \log_4\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$

4. $g(x) = \log_{10}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

5. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

6. $G(x) = \sqrt{\ln x}$

7. $y = 3^{x^2+2x-1}$

Aplica la derivación logarítmica para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

8. $y = x^{2/5}(x^2+8)^4 e^{x^2+x}$

9. $y = \frac{(x+1)^4(x-5)^3}{(x-3)^8}$

4.3. Derivadas de orden superior

Dada una función $f(x)$, su derivada respecto a x está dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \textbf{(15)}$$

Todos los valores de x para los cuales el límite anterior existe constituyen el dominio de la función f'. Si se repite el mismo procedimiento pero con f' haciendo las veces de f en la expresión **(15)** se obtiene la *segunda derivada* de la función respecto a x:

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Para la segunda derivada se usa la notación $f'' = (f')'$ que da a entender que *la segunda derivada de una función es la derivada de la derivada*.

Otras notaciones para la segunda derivada de la función $y = f(x)$ son:

$$y'' \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

(que se lee "segunda derivada de y con respecto a x"). El superíndice ^{2} hace referencia al hecho de ser la segunda derivada.

En resumen, para determinar la segunda derivada de una función lo que se hace es calcular la *derivada de la primera derivada,* tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16

¿Cuál es la segunda derivada de la función $f(x) = x^3 - x^2 + 7$?

Solución: la primera derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2 - 2x$

Derivando la última expresión obtenemos la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x - 2$$

Ejemplo 17

¿Cuál es la segunda derivada de $y = \frac{1}{x}$ y en qué valores está definida?

Solución: en lugar de usar la regla de la derivada de un cociente, escribimos la función en la forma $y = x^{-1}$ y usamos la regla que nos da la derivada de una potencia: $y' = -x^{-2}$ y $y'' = 2x^{-3}$. La segunda derivada al igual que la primera, e incluso igual que la función, no están definidas cuando $x = 0$.

Unidad 4

Significado de la segunda derivada

Si la derivada de una función en un valor x está asociada a la razón de cambio instantánea de la función en el punto x, ¿qué significado tiene la segunda derivada?

Se responde esta interrogante en la misma forma que se hizo con la primera derivada: *la segunda derivada es la razón de cambio instantánea de la primera derivada*.

El ejemplo siguiente plantea una interpretación de la segunda derivada en el contexto laboral.

Ejemplo 18

Un estudio de eficiencia laboral del turno matutino de una fábrica revela que un trabajador que empieza su jornada laboral a las 7:00 am habrá producido $Q(t) = -t^3 + 7t^2 + 22t$ unidades en t horas de trabajo.

a) ¿Cuál es la tasa de producción del trabajador en cualquier momento?
b) ¿Cuál es la tasa de producción del trabajador al mediodía?
c) ¿A qué razón cambia la tasa de producción del trabajador con respecto al tiempo a las 12 pm?

Solución: a) La tasa de producción en cualquier momento es la derivada de la producción respecto al tiempo, esto es:

$$Q'(t) = -3t^2 + 14t + 22$$

b) Al mediodía el trabajador ya ha trabajado 5 horas, por lo tanto la tasa de producción es:

$$Q'(5) = -3(5)^2 + 14(5) + 22 = 17 \text{ unidades por hora}$$

c) La razón de cambio de la tasa de producción es la segunda derivada de la función de producción, esto es:

$$Q''(t) = -6t + 14$$

Como a las 12 pm han transcurrido 5 horas, la razón de cambio de la tasa de producción se obtiene calculando la segunda derivada para $t = 5$:

$$Q''(5) = -6(5) + 14 = -16$$

El signo menos indica que la tasa de producción del trabajador disminuye. Para este caso concreto, a las 12 pm la tasa de producción disminuye en 16 unidades por hora.

Tercera derivada

La tercera derivada de una función es la derivada de la segunda derivada, es decir:

$$f'''=(f'')'$$

Si $y=f(x)$ existen diferentes notaciones para la tercera derivada:

$$y''' \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$$

Donde el superíndice ^{3} indica que es la tercera derivada.

Ejemplo 19

¿Cuáles son las tres primeras derivadas de la función $y=x^5+3x^3-7x^2+5x-5\,000$?

Solución:

$$y'=5x^4+9x^2-14x+5$$

$$y''=20x^3+18x-14$$

$$y'''=60x^2+18$$

La derivada *n*-ésima

El proceso para obtener la derivada de una derivada puede continuar, por ejemplo, la derivada de la tercera derivada es la cuarta derivada. En general, la *n-ésima derivada* de una función se obtiene derivando la función *n veces*.

Si $y=f(x)$, la derivada *n*-ésima se simboliza por:

$$y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

Donde el número superíndice *n* indica que es la *n-ésima* derivada.

Unidad 4

Ejercicio 3

En los ejercicios 1 a 3 calcula las dos primeras derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt{x}$

2. $y = \frac{1}{4}x^{-4}$

3. $y = \frac{3}{5}\ \frac{1}{x^6}$

¿Cuántas veces tienes que derivar las siguientes funciones para obtener una función constante?

4. $y = 4x^3 - 5x^2 + 1$

5. $y = 5x^4 + 10x^3 - x^2 + x - 2$

6. Generaliza la situación anterior, es decir, ¿cuántas veces tienes que derivar un polinomio de grado n para obtener una función constante?

7. Un estudio de eficiencia laboral del turno matutino de una fábrica revela que un trabajador que empieza su jornada laboral a las 7:00 am habrá producido $Q(t) = -t^3 + 7t^2 + 22t$ unidades en t horas de trabajo.

a) Calcula la tasa de producción del trabajador a las 9:00 am

b) ¿A qué razón cambia la tasa de producción del trabajador con respecto al tiempo a las 9:00 am?

8. Se proyecta que dentro de t meses el precio medio por unidad de artículos deportivos de un almacén será de $p(t) = -t^3 + 4t^2 + 120t + 300$ pesos.

a) ¿A qué razón se incrementará el precio por unidad con respecto al tiempo dentro de 7 meses?

b) ¿A qué razón cambiará la tasa de precios con respecto al tiempo en estos 7 meses?

Ejercicios resueltos

1. ¿Cuál es la derivada de la función $y = \frac{(2x+3)^2}{3x-1}$?

Solución: es la derivada de un cociente que tiene por numerador la expresión $(2x + 3)^2$, cuya derivada se calcula usando la regla de la cadena: $2(2x + 3)2$. Aplicando la regla del cociente se tiene:

$$y' = \frac{(3x-1)\,2(2x+3)2-(2x+3)^2 3}{(3x-1)^2}$$
$$= \frac{(3x-1)\,4(2x+3)-(2x+3)^2 3}{(3x-1)^2}$$
$$= \frac{24x^2-8x+36x-12-12x^2-36x-27}{(3x-1)^2}$$
$$= \frac{12x^2-8x-39}{(3x-1)^2}$$

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $f(x) = xe^{x^2}$ en el punto $x = 3$?

Solución: para obtener la ecuación de la recta tangente se requiere su pendiente que se calcula con la derivada de la función. Así tenemos que:

$$f'(x) = x\cdot(e^{x^2}2x) + e^{x^2} = 2x^2e^{x^2} + e^{x^2} = e^{x^2}(1+2x^2)$$

$$f'(3) = e^9(1+18) = 19e^9$$

De esta manera la ecuación de la recta tangente que pasa por $P(3, f(3)) = P(3, 3e^9)$ está dada por $y - 3e^9 = 19e^9(x - 3)$, es decir:

$$y = 19e^9x - 54e^9$$

3. ¿Cuál es la derivada de $y = [\ln(21x+8)]^2$?

Solución: aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$y' = 2\,[\ln(21x+8)]\cdot\frac{1}{21x+8}\cdot 21$$
$$= \frac{42}{21x+8}\ln(21x+8)$$

4. Si la función costo es $C = 8Q + 4\sqrt{Q} + 95$ y la relación del tiempo previsto de producción es $Q = 150\,t + 2\,700$, ¿cuál es la razón de cambio de costo con respecto al tiempo en $t = 6$?

Solución: el objetivo es determinar $\frac{dC}{dt}$ cuando $t = 6$, entonces, utilizando la regla de la cadena se tiene que $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dQ}\cdot\frac{dQ}{dt}$

Ahora $\frac{dC}{dQ} = 8 + \frac{2}{\sqrt{Q}}$ y $\frac{dQ}{dt} = 150$

Al reemplazar los resultados obtenidos se tiene:

$$\frac{dC}{dt} = \left(8 + \frac{2}{\sqrt{Q}}\right) 150 = 1\,200 + \frac{300}{\sqrt{Q}} = 1\,200 + \frac{300}{\sqrt{150t + 2\,700}}$$

Calculamos a $\frac{dC}{dt}$ cuando $t = 6$, por lo tanto:

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t=6} = 1200 + \frac{300}{\sqrt{150(6) + 2700}} = 1200 + \frac{300}{\sqrt{3600}} = 1205$$

5. Si el precio P depende del nivel de la producción Q, y Q depende del nivel de trabajo L empleado, $P = f(Q)$ y $Q = g(L)$ y el ingreso total R es PQ, ¿cuál es la razón de cambio instantánea del ingreso con respecto al trabajo, $\frac{dR}{dL}$? En economía esta razón se llama **producto del ingreso marginal del trabajo**.

Solución: tenemos que $R = P\ Q$ y su derivada por la regla del producto es:

$$\frac{dR}{dL} = P\frac{dQ}{dL} + Q\frac{dP}{dL} \qquad \textbf{(}i\textbf{)}$$

y que $P = f(Q)$ y $Q = g(L)$ aplicamos la regla de la cadena $\frac{dP}{dL} = \frac{dP}{dQ}\frac{dQ}{dL}$ **(*ii*)**

Reemplazamos **(*ii*)** en **(*i*)** para obtener la derivada del ingreso total respecto al trabajo:

$$\frac{dR}{dL} = P\frac{dQ}{dL} + Q\left(\frac{dP}{dQ}\frac{dQ}{dL}\right)$$

$$= \frac{dQ}{dL}\left(P + Q\frac{dP}{dQ}\right)$$

Ejercicios propuestos

Evalúa para cada una de las siguientes funciones la primera y la segunda derivada en el valor que se da.

1. $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 29,\ x = 2$

2. $g(x) = (x^3 - 4)(5x^2 + 9),\ x = 1$

3. $h(x) = 2^{x^2}\, 3^{2x},\ x = 0$

Deriva las siguientes funciones tantas veces como se pueda para obtener una constante. Da la última derivada calculada y su valor.

4. $h(t) = (6t^2 - 4)(5t + 7)$

5. $r(s) = (s^2 + 2s - 10)^2$

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

6. $G(u) = \ln\sqrt{\dfrac{3u+2}{3u-2}}$

7. $y = \ln(x + \ln x)$

8. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

9. $f(x) = \sqrt{x}2^x$

10. $g(x) = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

11. $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{3t^5}}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 2x^3)^{4/3}}$

13. $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

14. $y = e^{(x+1)(x-3)}$

15. $f(x) = (1 - x^{1/3})^{1/2}$

16. $f(x) = \dfrac{2x-1}{(3x+4)^5}$

17. $g(t) = \dfrac{1}{t^2}\left[t - (1+t^2)^{1/2}\right]$

18. $y = 5^{-1/x}$

19. Aplica la derivación logarítmica para calcular la derivada de la función:

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

20. Emplea la regla de la cadena para determinar las razones de cambio que se indican.

a) El costo *C* es una función de la cantidad *Q*; la producción es una función del trabajo empleado *L*. Determina la razón de cambio de costo con respecto al trabajo: *dC/dL*.
b) El ingreso *R* es una función de la producción *Q*; la producción es una función del capital *K* empleado. Determina la razón de cambio del ingreso con respecto al capital: *dR/dK*.
c) La producción *Q* es una función del trabajo *L*; el trabajo es una función del tiempo *t*. Calcula la razón de cambio de la producción con respecto al tiempo: *dQ/dt*.

Autoevaluación

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \ln\left(x^2 - \dfrac{1}{x} + e^x\right)$

2. $f(x) = (x^4 + 7)\ (x^5 + 6)^2$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

4. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en el punto $x = 0$?

a) $y = x$
b) $y = e^x$
c) $y = ax + e^x$
d) $y = x + e$

5. Emplea la derivación logarítmica para calcular las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

a) $g(x) = (x^4 + 7)(x^5 + 6)(x^3 + 2)$

b) $h(x) = \dfrac{(3x^5 - 4)(2x^3 + 9)}{7x^4 - 5}$

6. Un grupo de estudio del crecimiento demográfico encontró que la proyección de 5 años indica que dentro de t años la población de una determinada comunidad será $p(t) = -t^3 + 7t^2 + 46t + 250$ miles.

a) Determina a qué tasa crecerá la población dentro de 5 años.
b) Utiliza el cálculo para estimar a qué razón cambiará la tasa de crecimiento demográfico con respecto al tiempo dentro de 5 años.

7. Si la función costo total de una fábrica es $C(q) = 8q + 4\sqrt{q} + 95$ y la relación del tiempo previsto de producción es $q(t) = 250t + 2\,850$, determina la razón de cambio del costo total con respecto al tiempo en $t = 3$

a) 2 300.5
b) 2 288.7
c) 2 080.3
d) 2 000.8

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

1. $y' = 10(x^2 + 4x + 6)^4 (x + 2)$

2. $g'(x) = \dfrac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x}}$

3. $f'(t) = -\dfrac{8(t-1)}{(t^2-2t-5)^5}$

4. $g'(t) = 12t(6t^2 + 5)^2(t^3 - 7)^3(9t^3 + 5t - 21)$

5. $F'(s) = \dfrac{(19s^3-3s+16)s(s^2-1)^3}{2\sqrt{s^3+1}}$

6. $F'(y) = -\dfrac{60(y+6)^3}{(y-9)^5}$

7. 0.426 partes por millón.

8. 13 965.6 pesos por hora cuando ha transcurrido una hora de producción.

Ejercicio 2

1. $f'(x) = x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)$

2. $y' = \dfrac{1}{\ln 6}\left(\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}\right)$

3. $y' = \dfrac{1}{\ln 4}\left(-\dfrac{x-2}{x(x-1)}\right)$

4. $g'(x) = -\dfrac{1}{\ln 10}\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right)$

5. $h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

6. $G'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

7. $y' = 2\ln 3(x+1)3^{x^2+2x-1}$

8. $y' = x^{2/5}(x^2+8)^4 e^{x^2+x}\left(\dfrac{2}{5x} + \dfrac{8x}{x^2+8} + 2x + 1\right)$

9. $y' = \dfrac{(x+1)^3(x-5)^2}{(x-3)^9}(-x^2 - 6x + 91)$

Ejercicio 3

1. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'' = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$

2. $y' = -\dfrac{1}{x^5}$

$y'' = \dfrac{5}{x^6}$

3. $y' = -\dfrac{18}{5x^7}$

$y'' = \dfrac{126}{5x^8}$

4. 3 veces.

5. 4 veces.

6. *n* veces.

7. a) 38 artículos.
b) Aumenta en 2 artículos.

8. a) 29 pesos.
b) Disminuye en 34 pesos.

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. $f'(2) = 44, \quad f''(2) = 86$

2. $g'(1) = 12, \quad g''(1) = 114$

3. $h'(0) = 2\ln 3, \; h''(0) = (2\ln 3)^2 + 2\ln 2$

4. $h'''(t) = 180$

5. $r^{(4)}(s) = 24$

6. $g'(u) = -\dfrac{6}{(3u+2)(3u-2)}$

7. $y' = \dfrac{x+1}{x(x+\ln x)}$

8. $y' = -\dfrac{xe^{-x}}{e^{-x}+xe^{-x}}$

9. $f'(x) = 2^x\left[\dfrac{1+(2\ln 2)x}{2\sqrt{x}}\right]$

10. $g'(x) = -\dfrac{2}{x}e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

11. $g'(t) = -\dfrac{5\sqrt{3t}}{6t^4}$

12. $f'(x) = -\dfrac{4(1-6x^2)}{3(x-2x^3)^{7/3}}$

13. $h'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

14. $y' = 2(x-1)e^{(x+1)(x-3)}$

15. $f'(x) = -\dfrac{1}{6x^{2/3}(1-x^{1/3})^{1/2}}$

16. $f'(x) = \dfrac{-24x+23}{(3x+4)^6}$

17. $g'(t) = \dfrac{-t\sqrt{1+t^2}+t^2+2}{t^3\sqrt{1+t^2}}$

18. $y' = \dfrac{\ln 5}{x^2}5^{-1/x}$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{15}{3x+2}\right)$

20. a) $\dfrac{dC}{dL} = \dfrac{dC}{dQ}\cdot\dfrac{dQ}{dL}$

b) $\dfrac{dR}{dK} = \dfrac{dR}{dQ}\cdot\dfrac{dQ}{dK}$

c) $\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{dQ}{dL}\cdot\dfrac{dL}{dt}$

Respuestas a la autoevaluación

1. $f'(x) = \dfrac{2x + \left(\dfrac{1}{x^2}\right) + e^x}{x^2 - \left(\dfrac{1}{x}\right) + e^x}$

2. $f'(x) = \left[x^3(x^5 + 6)\right](14x^5 + 70x + 24)$

2. $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

4. a) $y = x$

5. a) $g'(x) = \left(\dfrac{4x^3}{x^4 + 7} + \dfrac{5x^4}{x^5 + 6} + \dfrac{3x^2}{x^3 + 2}\right)(x^4 + 7)(x^5 + 6)(x^3 + 2)$

b) $h'(x) = \left[\dfrac{15x^4}{3x^5 - 4} + \dfrac{6x^2}{2x^3 + 9} - \dfrac{28x^3}{7x^4 - 5}\right]\dfrac{(3x^5 - 4)(2x^3 + 9)}{7x^4 - 5}$

6. a) 41 000 personas por año.
b) –16 000 personas por año.

7. b)